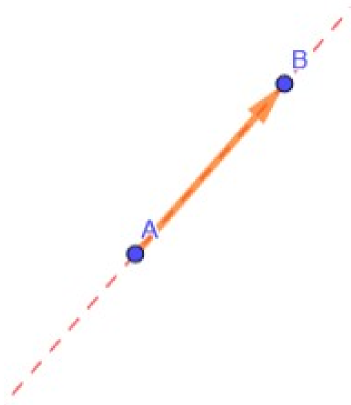
Vectores

Hasta ahora nuestros cálculos se han limitado a áreas, volúmenes temperatura,... etc. Llamadas medidas escalares. Pero en física necesitamos hablar de fuerzas, en los mapas meteorológicos de vientos y para ambas cosas necesitamos hablar de dirección, sentido e intensidad. Llamadas magnitudes vectoriales las cuales se representan mediante vectores.

1-. Vectores

Se llama **vector fijo** de origen A y extremo B al segmento orientado que queda determinado por A=(a_1, a_2) y B=(b_1, b_2). Lo designaremos por $\overrightarrow{AB}$



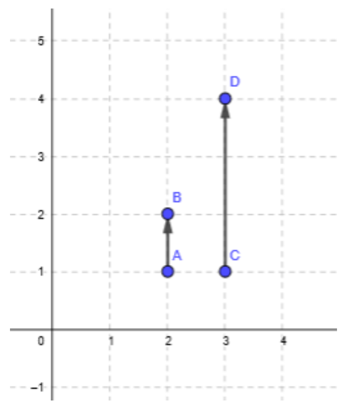
Un vector tiene tres elementos:

Módulo: Longitud del segmento AB. Se escribe $|\overrightarrow{AB}|$
Dirección: es la recta sobre la que está situado el vector. Dos vectores tienen la misma dirección si están sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.
Sentido: Es la forma de recorrer el segmento AB. Cuál es el origen y cuál es el extremo. Cada dirección tiene dos sentidos.

Dados dos puntos A y B, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo, misma dirección, pero sentido diferente.

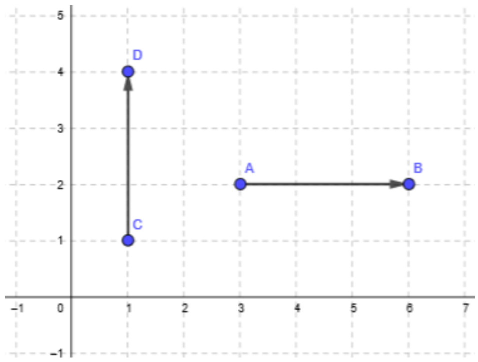
Aquel vector fijo cuyo origen coincide con su extremo es el vector **nulo** . $\overrightarrow{AA}$ Sus coordenadas son (0,0). El módulo del vector nulo es cero.

Se dice que un vector fijo es **unitario** si su módulo es la unidad, 1.

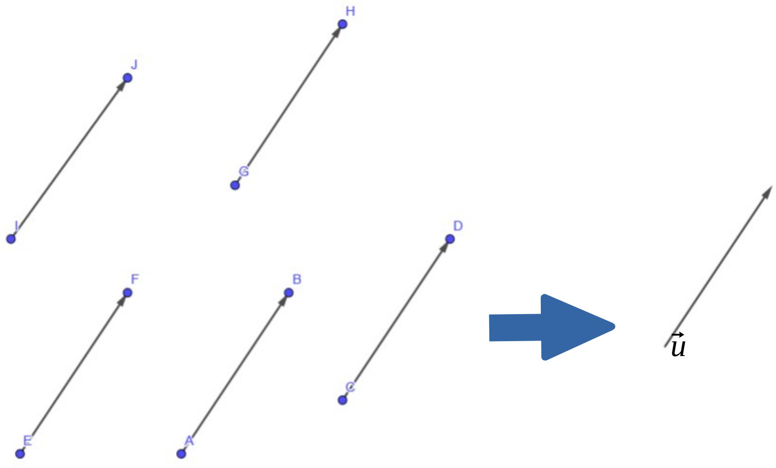


Dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección. Y se denota por $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$

Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **ortogonales** si las rectas en las que se apoyan son perpendiculares. Y se denota por $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$



Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Y se denota por $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.



Geométricamente, quiere decir que si ambos no están en la misma recta, uniendo A y C, B y D se obtiene un paralelogramo.

Dado un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ podemos formar un conjunto con todos los vectores equipolentes a él, a dicho conjunto se le llama **vector libre.**

Se denotan por letras minúsculas $\vec{u}$, $\vec{v}$,..

El vector libre **nulo** tiene módulo 0 y carece de dirección y sentido. Y se denota por $\vec{O}$.

Si $\overrightarrow{AB}$ es un vector fijo del plano y C un punto cualquiera del plano, existe un *único* representante de este vector que tiene su origen en el punto C.

2-. Coordenadas de un vector

Para facilitar la unidad vamos a pegar un pequeño salto y, antes de ver lo que es una base, para los siguientes puntos vamos a utilizar el sistema de referencia cartesiano, formado por la base canónica. (El que estamos acostumbrado a utilizar en 2D).

En un sistema de referencia cartesiano cada vector $\vec{u}$ se puede expresar con unas coordenadas

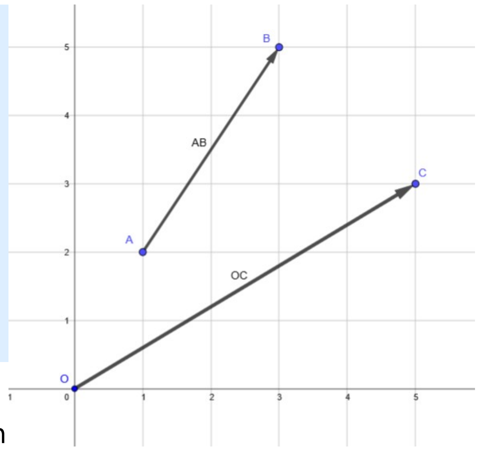
$\vec{u}=(u_1,u_2)$

Para obtener estas coordenadas a partir de dos puntos A=(a_1, a_2) y B=(b_1, b_2), basta con restar las coordenadas del punto extremo menos las del punto origen.

$$\overrightarrow{AB}=(u_1,u_2)=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$

Ejemplo: Dados los puntos A(1,2) B(3,5) y C(5,3)
Calcula y dibuja el vector $\overrightarrow{AB}$.
Calcula y dibuja el vector $\overrightarrow{OC}$.
Calcula el vector $\overrightarrow{BA}$.

Para calcular $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ *= (3,5)-(1,2)=(2,3)*
La coordenadas del vector $\overrightarrow{OC}$ *coinciden con las punto C →* $\overrightarrow{OC}$ *=(5,3)*
Para calcular $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ *= (1,2)-(3,5)=(-2,-3)*



Fíjate que $\vec{u}=(2,3)$ **significa que el vector avanza 2 en el eje x y 3 en el eje** y. Es decir, que gráficamente podemos obtener las coordenadas de un vector.

Vale, aquí te preguntaras ¿ $\overrightarrow{OA}$? ¿ $\overrightarrow{OB}$? $\overrightarrow{OA}$ es el vector que va desde el origen O(0,0) al punto A y $\overrightarrow{OB}$ es el vector que va desde el origen al punto B. Sus coordenadas coinciden con la de los puntos A y B. Más adelante veremos su explicación

Además con las coordenadas de un vector es muy sencillo obtener su **módulo** (aplicamos Pitágoras).

Si $\vec{u}=(u_1,u_2)$ -> $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$

Ejemplo: Si $\vec{u}=(3,4)$
El módulo del vector es $|\vec{u}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

El módulo, por tanto, nos sirve para ver la distancia entre dos puntos.

Y también usando estas coordenadas podemos ver **si dos vectores**, $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ **son paralelos ya que basta con ver si son proporcionales:**

$$Si\,\vec{u}\;y\,\vec{v}\,son\,paralelos\,entonces \rightarrow \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}$$

Otra forma de expresar un vector, $\vec{u}=(2,3)$, es mediante la forma 3i +2j (esto lo veremos un poco más adelante).

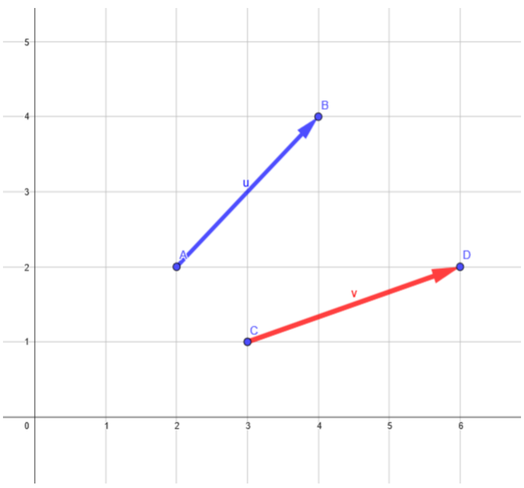
Aunque se escriban igual, no debemos confundir un vector con un punto.

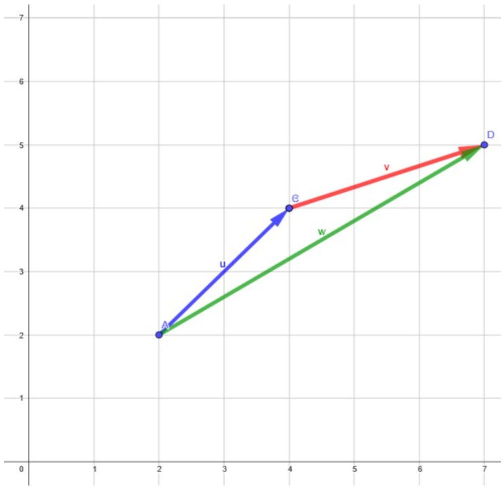
3-. Operaciones con vectores

Suma y resta

La suma y la resta de dos vectores es otro vector.

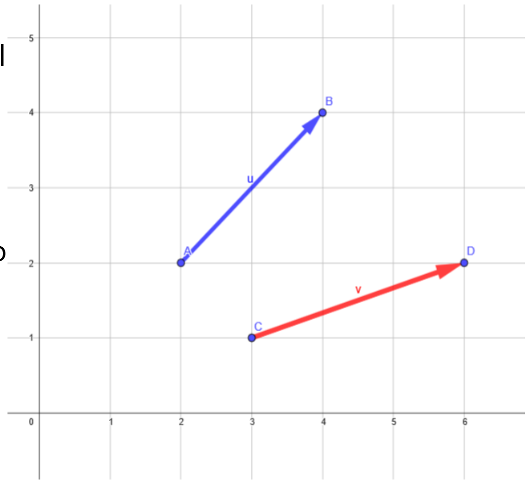
Para sumar vectores gráficamente, basta con colcarlos uno a continuación de otro y luego unir el origen del primero con el extremo del último. (Esto se puede hacer con varios vectores)

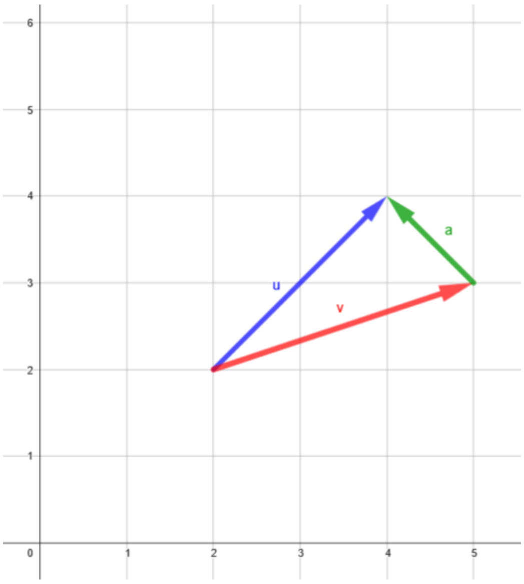


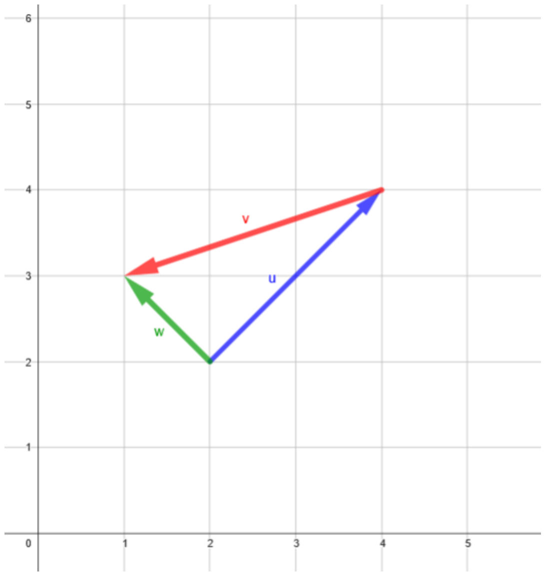


Para restar dos vectores colocamos los dos vectores en el mismo origen. Después unimos el extremo del segundo (el que resta) con el primero.

Otra forma es al primero sumarle el opuesto del segundo (como en el apartado anterior).







En este caso colocamos los dos vectores en el mismo origen y vamos del que resta al primero. Esta es la explicación de por qué

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

En este caso al primero le sumamos el puesto del segungo. Observa que el obtenemos el mismo vector.

$$\vec{w}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Si tenemos sus coordenadas, para sumar o restar vectores, sumamos o restamos sus coordenadas.

Ejemplos: En los gráficos anteriores $\vec{u}=(2,2)$ *y* $\vec{v}=(3,1)$

Para calcular $\vec{u}+\vec{v}=(2,2)+(3,1)=(4,3)$ *simplemente tenemos que sumar sus coordenadas.*

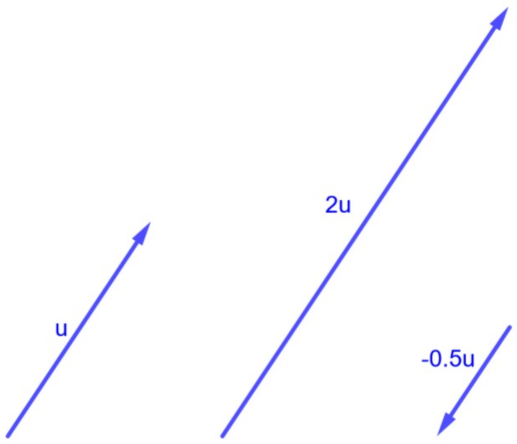
Para calcular $\vec{u}-\vec{v}=(2,2)-(3,1)=(-1,1)$ *simplemente tenemos que restar sus coordenadas.*

Producto por un escalar

El producto de un vector por un número real k (llamado escalar) es otro vector k·u que cumple que:

- Su módulo es k veces el módulo de u.
- Tiene la misma dirección.
- El sentido se mantiene si k >0 y cambia si k<0.

Gráficamente alargamos o encongemos el vector.



Para multiplicar un vector por un número k, multiplicamos cada una de sus componentes por k.

Analíticamente tendríamos que si k es un número real y $\vec{u}=(u_1,u_2)$ entonces $k\cdot\vec{u}=(k\cdot u_1,k\cdot u_2)$

Ejemplo: Si $\vec{u}=(4,6)$

$$2\vec{u}=2\cdot(4,6)=(8,16)$$
$$\frac{\vec{u}}{2}=\frac{1}{2}\cdot(4,6)=(2,3)$$
$$-3\vec{u}=-3\cdot(4,6)=(-12,-18)$$

Propiedades

1. Es una operación externa (Multiplicamos un número real de IR por un vector de $\mathbf{V}^2$)
2. Distributiva respecto de la suma de vectores: $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
3. Distributiva respecto de la suma de escalares: $(k+n)\vec{u}=k\vec{u}+n\vec{u}$
4. Asociativa mixta: $(k\cdot n)\vec{u}=k(n\vec{u})$
5. $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$

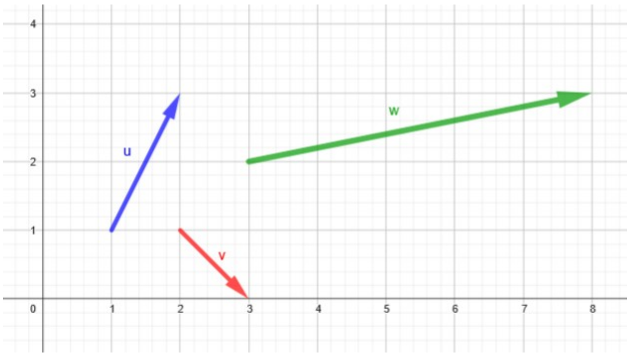
En $\mathbf{V}^2$ con una operación interna (+) y otra externa (· IR) y las propiedades ya mencionadas, obtenemos la terna (V^2, +, · IR) cuya estructura se llama espacio vectorial y por ello a sus elementos se les llama vectores.

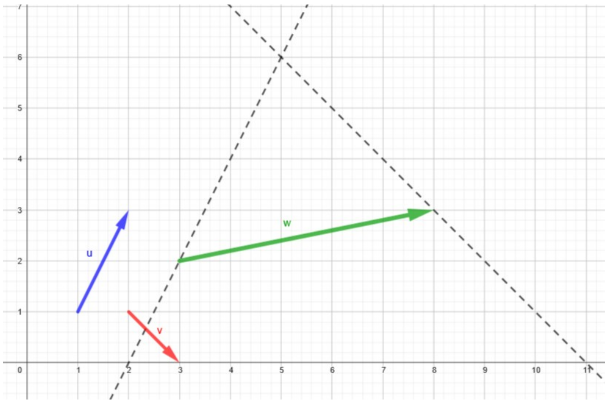
Combinación lineal

Con estas operaciones ya podemos hablar del concepto de combinación lineal:

Un vector $\vec{w}$ es una combinación lineal de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si puede expresarse como $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta v$

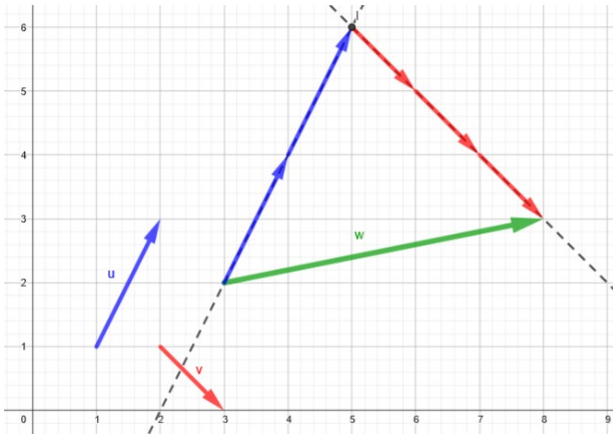
Por ejemplo vamos a expresar el vector w como una combinación lineal de u y v





Una forma sencilla de hacer esto es trazar dos líneas. Una paralela a uno de los vectores por el origen del vector que queremos expresar como combinación lineal, y otra paralela al otro vector por el extremo.

Ahora colocamos los vectores sobre esas líneas:



Y obtenemos que:

$$\vec{w}=2\vec{u}+3v$$

Esto se puede comprobar fácilmente con las coordenadas ya que

$$\vec{u}=(1,2)$$
$$\vec{v}=(1,-1)$$

$$\vec{w}=(5,1)=2\cdot(1,2)+3\cdot(1,-1)$$

4-. Independencia lineal.

Decimos que un conjunto de vectores son linealmente dependientes si podemos expresar uno de ellos como combinación lineal de los demás. En caso contrario decimos que son linealmente independientes.

Dos vectores que tienen la misma dirección son linealmente dependientes (es decir, si son paralelos). Dos vectores que tienen diferente dirección son linealmente independientes.

Si nos piden que comprobemos si dos vectores forman una base, basta que miremos si son parelelos o no.

En el plano (2D) si tenemos 3 o más vectores, estos son linealmente dependientes, ya que con solo dos vectores linealemente independientes podemos formar cualquier otro vector.

Cualquier conjunto de vectores que contenga el vector nulo, es linealmente dependiente.

5-. Bases

Dos vectores dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base si son linealmente independientes. En ese caso, cualquier vector puede formarse como una combinación lineal de esos vectores, como vimos en el ejemplo de combinación lineal.

Un sistema de referencia está formado por un punto origen O y una base de vectores { $\vec{u}$ y $\vec{v}$ }

Si estos vectores son perpendiculares entre ellos se dice que la base es ortogonal.
Si además son unitarios (tienen módulo 1) se dice que es ortonormal.

Nota: Cuando un vector es unitario, también puede notarse como $\hat{u}$

La base más sencilla de montar es la base formada por los vectores $\vec{i}$ (1,0) y $\vec{j}$ (0,1) (los vectores sobre los ejes de coordenadas y de módulo 1).

A esta base { $\vec{i}$, $\vec{j}$ }, se le denomina **base canónica** y será la base de referencia salvo que se indique lo contrario.

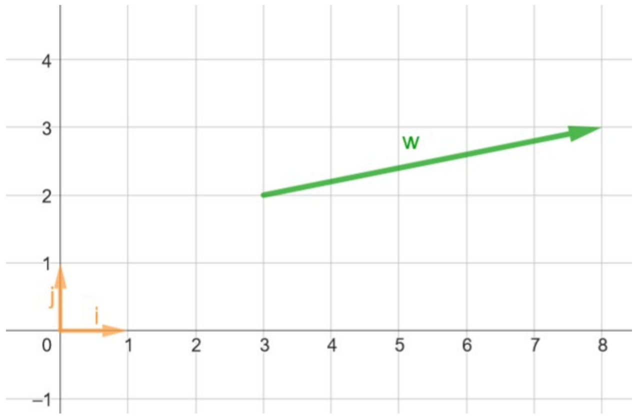
Es decir que l**as coordenadas de un vector en realidad indican la combinación lineal de los vectores de la base.**

De esta forma, es habitual escribir, por ejemplo, un vector (2,3) como 2 $\vec{i}$ +3 $\vec{j}$, haciendo referencia a esta base canónica.

Pero podemos usar cualquier otra base y entonces las coordenadas del resto de vectores cambiarían.

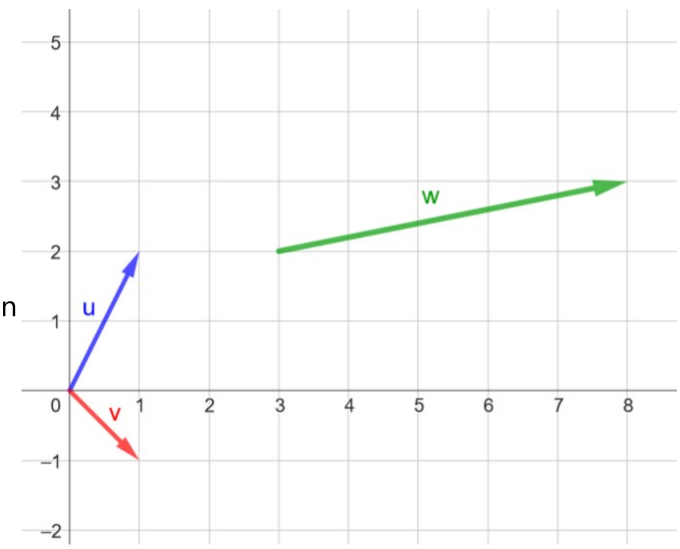
Observa los siguientes ejemplos y mira como cambian las coordenadas según la base:

En esta base (la canónica) el vector $\vec{w}$ tiene de coordenadas (5,1) ya que puede expresarse como 5 veces el vector i + 1 vez el vector j.



En esta otra base formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el vector $\vec{w}$ tiene de coordenadas (2,3) ya que puede expresarse como 2 veces el vector u + 3 vez el vector v. (es el ejemplo que tenemos realizado en el apartado de combinación lineal).

Cuando cambiamos de base, la cuadrícula también suele cambiar para que concuerde con esa base.



Mediante un sistema de referencia, a cada punto P se le asocia un vector $\vec{OP}$ **.** Las coordenadas de ese punto P son las coordenadas del vector $\vec{OP}$ con respecto a ese sistema de referencia. Por ese motivo las coordenadas de un punto coinciden con las coordenadas del vector OP.

6-. Producto escalar

Se define el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ y se denota por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ como un número, dicho número es cero si $\vec{u}$ o $\vec{v}$ es el vector nulo y es $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$, siendo α el ángulo que forman $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, ambos vectores no nulos.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

IMPORTANTE: Recuerda que el coseno de 90º es 0. ¿Qué significa eso? Que si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es 0.

Propiedades del producto escalar:

1. Es una operación externa.
2. $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$
3. Conmutativa $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
4. $k\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\cdot\vec{v})$
5. Distributiva respecto de la suma de vectores: $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

¿Cómo calculamos con coordenadas? Expresión analítica del producto escalar.

Si estamos en la base canónica el resultado es el siguiente:
$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$

¿Por qué?

Sea B = { $\vec{i}$, $\vec{j}$ } la base canónica de V^2, $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ dos vectores del espacio vectorial, siendo las coordenadas de $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y las de $\vec{v}=(v_1,v_2)$ entonces se tiene que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{i}+u_2\vec{j})(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}) = u_1\cdot v_1\vec{i}\vec{i}+u_1 v_2\vec{i}\vec{j}++u_2 v_1\vec{j}\vec{i}+u_2\cdot v_2\vec{j}\vec{j} = u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

Porque:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1\cdot 1\cdot\cos 0^o=1$$
$$\vec{j}\cdot\vec{j}=1\cdot 1\cdot\cos 0^o=1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=1\cdot 1\cdot\cos 90^o=0$$

Esto solo sucede porque la base es ortonormal (ortogonal y unitaria). Si no, el resultado del producto escalar sería diferente.

Con el producto escalar, aplicando las dos formas de calcularlo, podemos obtener el ángulo que forman dos vectores.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ *y* $\vec{v}=(2,0)$ *calcula el ángulo que forman:*

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Sabemos que:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

$$3\cdot 2+4\cdot 0=5\cdot 2\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{6}{10}=\cos\alpha$$

$\alpha=\arccos\frac{6}{10}=53{,}13^{o}$ *Y este es el ángulo que forman los vectores.*

También podemos ver si dos vectores son perpendidualres o utilizarlo para obtener el valor de un parámetro para que lo sean.

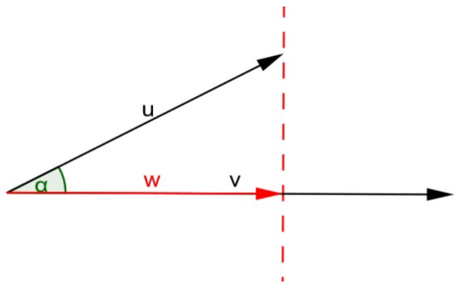
Ejemplo: ¿Son perpendiculares los vectores $\vec{u}=(3,4)$ *y* $\vec{v}=(-2,1)$ *?*

$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot(-2)+4\cdot 1=-6+2=-2$ *Puesto que no es 0, no son perpendiculares.*

Truco: Obtener un vector perpendicular a otro es muy sencillo: basta con cambiar el orden de las coordenadas y el signo a una de ellas.

Por ejemplo, un vector perpendicular a $\vec{u}=(3,4)$ sería el vector $\vec{v}=(-4,3)$

El signficado gráfico del producto escalar de dos vectores, equivale al producto del módulo de uno de ellos por la **proyección** del otro sobre él.



En el dibujo anterior, $\vec{w}$ es la proyección de $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$. Aplicando trigonometría tenemos que $|proy_{\vec{v}}\vec{u}|=|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{w}|$

Es decir que cuando nos pidan el módulo de la proyección de un vector sobre otro lo que tenemos que hacer es multiplicar su módulo por el coseno del ángulo que forman (trigonometría).

¿Cómo podemos obtener las coordenadas de ese vector $\vec{w}$?

1º Calculamos su módulo (proyección).

2º Hacemos unitario el vector $\vec{v}$ y lo multiplicamos por $|\vec{w}|$

7-. Aplicaciones de los vectores

Obtener un vector unitario

Si nos dan un vector, para obtener un vector unitario tan solo tenemos que “dividir” el vector por su módulo. Después podemos modificar su longitud multiplicándolo por un escalar.

Ejemplo: Dado el vector $\vec{u}=(3,4)$ *, obtén un vector con la misma dirección y sentido pero unitario.*

$$|\vec{u}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

El vector pedido es $\vec{u}=\frac{1}{5}\cdot(3,4)=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B es igual al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

Punto medio de un segmento

Para calcular el punto medio de un segmento AB, calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y al punto A le sumamos la mitad de ese vector.

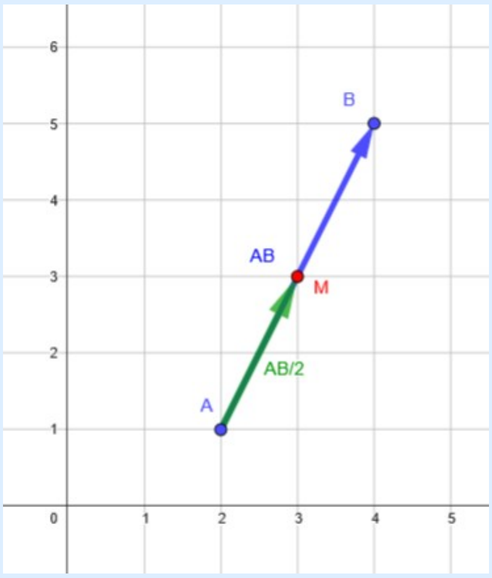
Ejemplo: Calcula el punto medio M del segmento formado por A(2,1) y B(4,5)

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,5)-(2,1)=(2,4)$$

Ahora al punto A le sumamos la mitad de ese vector para obtener el punto M:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(2,1)+(1,2)=(3,3)$$



Podemos aplicar esta idea para dividir un segmento en varias partes iguales. (Si por ejemplo queremos dividirlo en tres partes, bastaría con multiplicar el vector $\overrightarrow{AB}$ por un ⅓ y obtener los puntos intermedios).

Punto simétrico a otro punto

La idea es similar al apartado anterior, pero ahora en lugar de sumarle la mitad, le sumamos el doble del vector $\overrightarrow{AB}$

Ejemplo: Calcula el punto simétrico de A(2,1) respecto al punto B(4,5)

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,5)-(2,1)=(2,4)$$

Ahora al punto A le sumamos el doble de ese vector para obtener el punto A'

$$\overrightarrow{OA}'=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}=(2,1)+(4,8)=(6,9)$$