TEMA 8: LÍMITES. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

8.1 CONCEPTO DE LÍMITE LATERAL. LÍMITE.

Una **sucesión** de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, de manera que a cada número natural le corresponde un número real.

Por ejemplo: 1, 4, 9, 16, ... → $a_n = n^2$ ¿Hacia dónde va?

1, ½, 1/3, ¼, ... → $a_n = 1/n$ ¿Hacia dónde va?

1, 4/3, 3/2, 8/5 → $a_n = \frac{2n}{n+1}$ ¿Hacia dónde va? Este límite es más difícil de calcular, en esta unidad veremos cómo hacerlo.

Representa las gráficas de las funciones:

$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2$ $h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$.

Observa que ocurre en x = 1, en x = -1 y finalmente en x = 0.

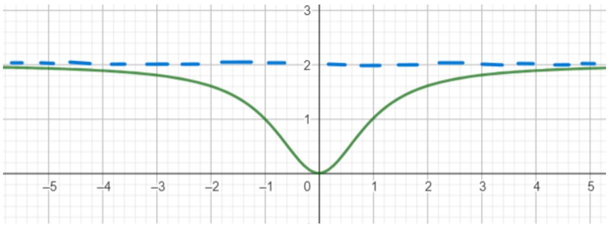
¿Qué ocurre cuando x se hace muy grande? ¿y cuándo se hace muy pequeño?

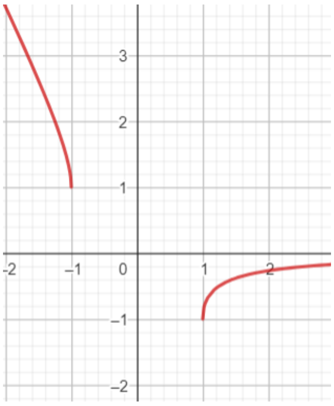
Formalicemos el concepto de acercamiento: Se dice que un número real L es el **límite de una función f en el punto a por la derecha**, si al tomar valores de x cada vez más próximos a "a", con x > a, sus imágenes correspondientes, f(x), están más próximos a L. Es decir, si $x - a \to 0^+$ entonces $|f(x) - L| \to 0$. Y se denota por $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$. Análogamente se dice que un número real L es el **límite de una función f en el punto a por la izquierda**, si al tomar valores de x cada vez más próximos a "a", con x < a, sus imágenes correspondientes, f(x), están más próximos a L. Es decir si $x - a \to 0^-$ entonces $|f(x) - L| \to 0$. Y se denota por $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Una función f tiene por **límite L cuando x tiende a "a"** si existe el límite por la derecha de f en x=a, existe el límite por la izquierda de f en x=a y ambos límites coinciden y valen L. Se denota por $\lim_{x\to a} f(x) = L$. *Si existe, el límite es único*. Además decimos que f es **convergente** en x = a.

Ejercicio 1: Representa la función f(x) = $\begin{cases} -x+2 & si\ x<2 \\ \sqrt{x+2} & si\ x \geq 2 \end{cases}$. Calcula los siguientes límites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

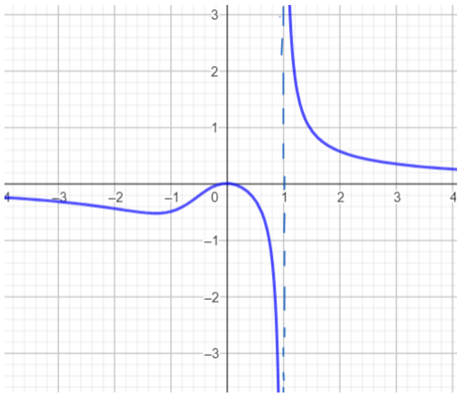
Ejercicio 2: Dada la gráfica de la función f(x) = $\frac{2x^2}{x^2+1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0} f(x)$





Ejercicio 3: Dada la gráfica de la función f(x) = $\sqrt{x^2-1}-x$. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

Ejercicio 4: Dada la gráfica de la función f(x) = $\frac{x^2}{x^3+1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$



8.2 OPERACIONES CON FUNCIONES CONVERGENTES.

Sean f y g dos funciones convergentes en x=a con $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$ entonces podemos afirmar que:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l + m$
2. $\lim\limits_{x\to a}(kf(x)) = k.l$
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = l\ .\ m$
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$, si $m \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ con $l > 0$
6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = l^m$ con $l > 0$

SUMA

$f(x)+g(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
m	$l+m$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**I**
$-\infty$	$-\infty$	**I**	$-\infty$

PRODUCTO

$f(x).g(x)$	L	0	$+\infty$	$-\infty$
m	$l.m$	0	$m<0$ $-\infty$ $m>0$ $+\infty$	$m<0$ $+\infty$ $m>0$ $-\infty$
0	0	0	**I**	**I**
$+\infty$	$l<0$ $-\infty$ $l>0$ $+\infty$	**I**	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$l<0$ $+\infty$ $l>0$ $-\infty$	**I**	$-\infty$	$+\infty$

COCIENTE

$f(x):g(x)$	l	0	$+\infty$	$-\infty$
m	l/m	0	$m<0$ $-\infty$ $m>0$ $+\infty$	$m<0$ $+\infty$ $m>0$ $-\infty$
0	$\pm\infty$	I	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	0	I	I
$-\infty$	0	0	I	I

POTENCIA

$f(x)^{g(x)}$	m	0	$+\infty$	$-\infty$
l	l^m	1	$l>1$ $+\infty$ $l<1$ 0	$l>1$ 0 $l<1$ $+\infty$
0	0	**I**	0	$+\infty$
1	1	1	**I**	**I**
$+\infty$	$m>0$ $+\infty$ $m<0$ 0	**I**	$+\infty$	0

1) Los casos 0/0 se resuelven factorizando y simplificando.

2) Los Casos $\frac{\infty}{\infty}$ se resuelve con la regla de los grados $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0 & \text{si grado}P<\text{grado}Q\\ \infty & \text{si grado}P>\text{grado}Q\\ \frac{a}{b} & \text{si grado}P=\text{grado}Q\end{cases}$

siendo a el coeficiente principal de P y b el coeficiente principal de Q.

3) En los casos $\infty-\infty$ aplicamos el conjugado si hay raíces o realizamos la diferencia de fracciones.

4) Cuando la indeterminada es del tipo $0.\infty$, utilizamos herramientas algebraicas, pasamos unos de los dos factores al denominador.
5) Las indeterminadas de potencias no las resolveremos, pero debemos reconocerlas.
6) Recuerda, no es lo mismo $+\infty$ que $-\infty$ en el exponente de una potencia.

7) <u>Contenido de ampliación</u>: A continuación, explicaremos la definición del número e.

Dada la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ si calculamos términos de dicha sucesión va tomando valores que se acercan a 2´718281828459045235360... llamado **número e**.

Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^{+\infty} = 2´7818.. = e$.

Para resolver la indeterminada del tipo 1^∞ utilizamos el número ya que podemos generalizar y decir que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$. Esto es lo que nos ayudara a calcular los siguientes límites del tipo $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+7}\right)^{4n-5} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3n-2}{3n+7} - 1\right)^{4n-5} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3n-2-3n-7}{3n+7}\right)^{4n-5} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-9}{3n+7}\right)^{4n-5} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{4n-5} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{\frac{3n+7}{-9}\frac{-9}{3n+7}(4n-5)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+7}{-9}}\right)^{\frac{3n+7}{-9}}\right]^{\frac{-9}{3n+7}(4n-5)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-9}{3n+7}(4n-5)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-36n+45}{3n+7}} = e^{-12}$$

8.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

En el curso pasado nos decían que la continuidad de una función es la suavidad de su gráfica, poder dibujarla de un sólo trazo. *Poner dos gráficas, una continua en 2 y otra discontinua y que saquen conclusiones de por qué ocurre.*

Una función f es **continua en un punto x=a** si se cumple:

1.- Existe el límite de f cuando x tiende a x = a. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

2.- Existe la imagen de a mediante f. $\exists f(a)$

3.- Ambos coinciden. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Propiedades:

1) Una función f es **continua en el intervalo** (a,b) si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.

2) Si f y g son continuas en x = a entonces podemos afirmar que:

a) f + g es continua en x = a.

b) k f es continua en x = a.

c) f . g es continua en x = a.

d) f/g (con $g(a) \neq 0$) es continua en x = a.

e) (gof) es continua en x = a.

3) Las funciones polinómicas son continuas en IR.

4) Las funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, raíz de x, seno, coseno y tangente son continuas en su dominio. Las funciones que son composición de dos funciones continuas son continuas.

Si una función f no es continua en x = a se dice que es **discontinua**. Podemos hablar de tres tipos de discontinuidades:

1. La función f tiene una discontinuidad de **tipo evitable** en x=a si:

a) Existe el límite de f cuando x → a y f(a), pero no coinciden.

b) Existe el límite de f cuando x → a, pero no existe f(a).

2. La función f tiene una discontinuidad de **salto finito** en x = a si existe el límite de f cuando x tiende a x = a por la derecha y por la izquierda pero no coinciden (no tiene por qué existir la imagen).

3. La función f tiene una discontinuidad de **salto infinito** en x = a cuando uno o los dos límites laterales de f cuando x tiende a x = a vale infinito.

Ejercicio 9: Estudia la continuidad de la función f en el punto o puntos indicados, no olvides dibujar la discontinuidad:

a) $f(x) = x^2 + 1$ en x=2.

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ en $x=2$ y en $x=1$.

c) $f(x)=\sqrt{x+3}$ para x = 2, x = 1 y x = -4.

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2-\sqrt{x+2}} & \text{si } x\neq 2\\ 0 & \text{si } x=2\end{cases}$ en $x=2$ D. evitable

e) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4x+4}$ en $x=2$

f) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & \text{si } x\leq 2\\ e^x & \text{si } x>2\end{cases}$ en $x=2$ D. salto finito

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1\\ \dfrac{3}{2} & \text{si } x=1\end{cases}$ en $x=1$ y en $x=-1$

h) f(x) = $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ 5 & \text{si } x=2\end{cases}$ en $x=2$

Ejercicio 10: Estudia la continuidad de las siguientes funciones (en su globalidad, dominio, continuidad en puntos especiales y conclusiones):

a) $f(x)=x^2+1$

b) f(x) = e^x

c) f(x) = senx + Lnx

d) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$

e) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$

f) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

g) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & six\leq 2\\ x-2 & six>2\end{cases}$

h) f(x) = $|x^2-4x+3|$

i) f(x) = $|sen(x)|$

j) f(x) = ln $|x|$

k) $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{x-5} & six\leq 0\\ \sqrt{x+1} & six>0\end{cases}$

l) f(x) = 2x + $|x-3|$

m) f(x) = $\begin{cases}x^2-1 & si\ x\leq 0\\ \frac{1}{x} & si\ 0<x<1\\ \sqrt{x} & si\ x\geq 1\end{cases}$

n) f(x) = $\frac{2-|x|}{|x-3|}$

Ejercicio 11: ¿Podrías definir una función g(x) igual a f(x) = $\frac{x^2-9}{2x-6}$ para todo $x \neq 3$ y que esté definida en x = 3 y sea continua en dicho punto?

Ejercicio 12: Dada la función f(x) = $\begin{cases} x^2+1 & si\ x \leq 1 \\ ax+3 & si\ x > 1 \end{cases}$ Determina a para que la función sea continua en todo su dominio.

Ejercicio 13: Calcula a y b para que f sea continua en todo su dominio siendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+b}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{4}{x-2} & si\ 0 < x < 1 \\ \frac{x^2+1}{ax} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

8.5 ASÍNTOTAS.

Dibuja la gráfica de la función f(x) = $\frac{x+2}{x-1}$.

Si en un punto x = a la función f tiene uno o ambos límites laterales infinito se dice que f tiene una **asíntota vertical** en x=a.

El comportamiento de una función en el infinito es muy importante para dibujar su gráfica, si se acerca a una recta horizontal le llamaremos a. horizontal, si se acerca a una recta oblicua le llamaremos a. oblicua, si no hay ninguna de las dos decimos que son ramas parabólicas. Para estudiar este comportamiento debemos calcular el límite de la función cuando x tiende a infinito.

a) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, con $k \in \Re$, se dice que f tiene una **asíntota horizontal** en y = k.

b) Sea $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y "mx + n" el cociente de la división de P entre Q, si $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+n)] = 0$, entonces decimos que f tiene una **asíntota oblicua** en la recta y = mx+ n. Para calcula m y n en una asíntota oblicua tenemos las siguientes expresiones:

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y n = $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Hay que tener en cuenta que si hay una asíntota horizontal ya no puede existir la oblicua. Pero cuidado, puede existir una horizontal cuando x tiende a $+\infty$ y una oblicua cuando x tiende a $-\infty$, esto suele ocurrir en las funciones definidas a trozos. También podemos tener dos asíntotas horizontales distintas.

En clase calcularemos las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{-x}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

Ejercicio 14: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x - 3$

b) $f(x) = x^2 + 5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x-6}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{(x-1)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-x}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

h) $f(x) = \dfrac{4x^2-x}{2x+1}$

i) $f(x) = \dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}$

j) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

m) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}$