Trigonometría II

Ahora que ya conocemos los fundamentos de la trigonométrica, vamos a profundizar un poco más.

Al igual que en la parte anterior, en este bloque volveremos a diferenciar entre resolución de triángulos y relaciones entre las razones trigonométricas para facilitar el trabajo.

1-. Razones de operaciones con ángulos

Existe varias fórmulas que relación ángulos que nos convienen saber.

Tienes la demostración de todas ellas en el pdf de demostraciones.

Suma de ángulos

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, sen\,\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-sen\,\alpha\, sen\,\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

Diferencia de ángulos (lo puedes sacar a partir de la suma)

$$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\, sen\,\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+sen\,\alpha\, sen\,\beta$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

Ángulo doble (lo puedes sacar a partir de la suma)

$$sen(2\alpha) = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$tg(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Ángulo mitad (lo puedes sacar usando el cos 2α)

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Vamos a ver ahora varios ejemplos de cómo puedes usar estas nuevas fórmulas.

Ejemplo 1: Calcular nuevos ángulos.

Calcula el seno de 75º

No conocemos el seno de 75º, pero 75º lo podemos expresar como 45º+30º

$$sen\,75^o = sen(45^o+30^o) = sen\,45^o \cdot cos\,30^o + \cos 45^o \cdot sen\,30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Calcula el seno de 30º como la mitad de 60º

$$sen\,30^o = sen\left(\frac{60^o}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos 60^o}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Si el seno de un ángulo es 0.6, calcula el coseno del doble de ese ángulo:

Aunque podemos trabajar con decimales, vamos a pasar 0.6 a fracción $\frac{3}{5}$

Calculamos el coseno

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

Aplicamos la fórmula del ángulo doble para el coseno

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}-\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

Calcula la tangente de 135º

135º lo podemos expresar como 180º-45º

$$tg(135^o) = tg(180^o-45^o) = \frac{tg\,180^o - tg\,45^o}{1+tg\,180^o\,tg\,45^o} = \frac{0-1}{1+0\cdot 1} = -\frac{1}{1} = -1$$

Ejemplo 2: Resolver ecuaciones trigonométricas con ángulos distintos

En la primera parte todas las razones trigonométricas que nos aparecían en las ecuaciones tenían los mismos ángulos (x). Ahora pueden aparecernos ángulos diferentes y lo que es mejor, podemos resolverlas:

$$\boldsymbol{sen\,2x+senx=0}$$

Aplicamos las formulas para quitar el 2x del seno y que todo en función de x.

$$2\,senx\cdot cosx+senx=0$$

Ya estamos en un caso conocido. Podemos sacar factor común sen x.

$$senx\,(2\,cosx+1)=0$$

Por último resolvemos las ecuaciones.

Si sen x= 0 → x= 90º+k·360º o 270º+k·360º

Si cos x = -1 over 2 → x= 150º, 210º +k·360º

** Suele ser habitual que aparezca *cos2x* en las ecuaciones. Como hemos visto, este se deshace en $cos^2 x - sen^2 x$ a los que a su vez podemos aplicar la ***relación fundamental de la trigonometría*** para que nos queden solo senos o cosenos.**

Ejemplo 3: Simplificar expresiones

Estas nuevas fórmulas también podemos utilizarlas para simplificar expresiones (o para comprobar que una igualdad es cierta).

Simplifica $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{sen^2\alpha}$

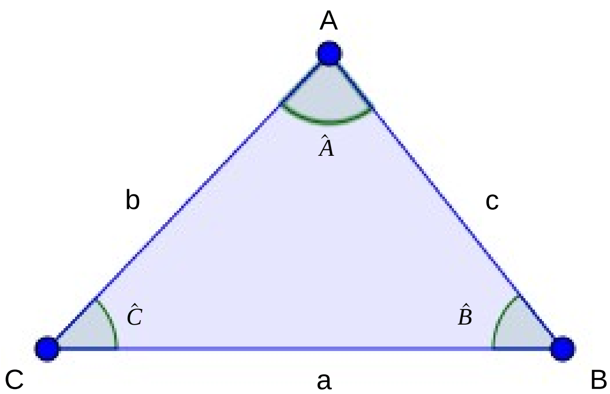
$$\frac{1-\cos 2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1-\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right)}{sen^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha + sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{sen^2\alpha + sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{2\,sen^2\alpha}{sen^2\alpha} = 2$$

2-. Teorema del seno y del coseno

Ya has visto como resolver triángulos rectángulos, aplicar el método de la doble tangente para resolver problemas y a dividir triángulos no rectángulos mediante su altura (obteniendo así dos triángulos rectángulos).

Ahora vamos a ver dos teoremas, el del seno y el del coseno, para poder trabajar con cualquier tipo de triángulo directamente.

Vamos a ello:



Teorema del seno

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Teorema del coseno

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$$

Fíjate que en un **triángulo rectángulo**, si aplicamos el **teorema del coseno** con la **hipotenusa** (a), el coseno de 90º es 0 y nos queda el **teorema de Pitágoras**.

Tienes las demostraciones de estos teoremas en el pdf de demostraciones.

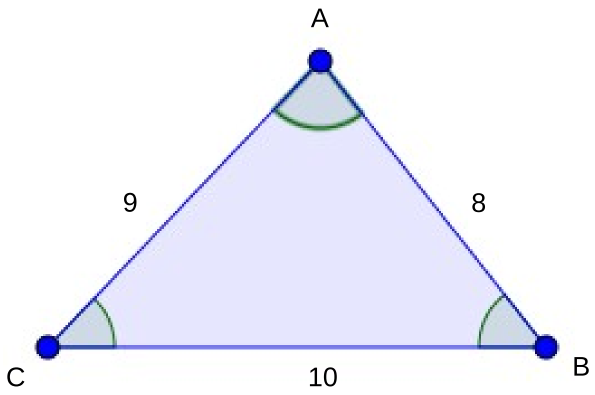
2-. ¿Cuándo aplicar el teorema del seno y el teorema del coseno?

2.1-. Conocemos los 3 lados.

Si conocemos los 3 lados, tenemos que empezar por el **teorema del coseno** (con el teorema del seno tendríamos dos incógnitas).

Usaremos este teorema para obtener uno de sus ángulos. Después podemos utilizar **otra vez el teorema del coseno o bien el teorema del seno** para obtener otro de los ángulos.

Finalmente como **los ángulos de un triángulo suman 180º** podemos calcular el último ángulo.



$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$
$$10^2 = 9^2+8^2-2\cdot 9\cdot 8\cos\hat{A}$$
$$\cos\hat{A} = \frac{10^2-9^2-8^2}{-2\cdot 9\cdot 8} = 0{,}65$$
$$\mathbf{\hat{A} = \arccos 0{,}65 = 71{,}79^o}$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{a} = \frac{sen\,\hat{B}}{b}$$
$$\frac{sen\,71{,}79^o}{10} = \frac{sen\,\hat{B}}{9}$$
$$sen\,\hat{B} = \frac{9\cdot sen\,71{,}79^o}{10} = 0{,}854$$
$$\mathbf{\hat{B} = arcsen\,0{,}854 = 58{,}75^o}$$

$$\mathbf{\hat{C} = 180-\hat{A}-\hat{B} = 49{,}46^o}$$

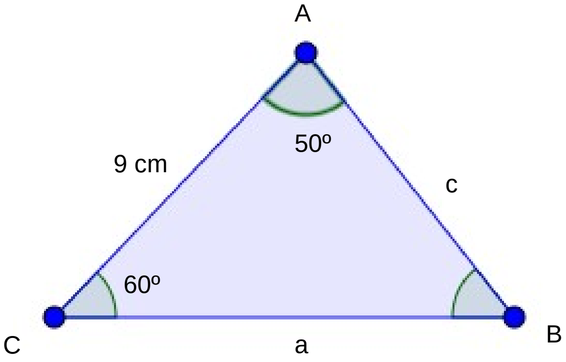
**** **IMPORTANTE***** Cuando aplicamos el **teorema del seno**, existen **dos ángulos que podrían ser solución** con ese seno. En el ejemplo anterior tendríamos 58,75º en el primer cuadrante y 121.25º en el segundo cuadrante. En este caso **no podría ser 121.25º porque si lo sumamos con Â, 71.79º, nos pasamos de 180º** (la suma total de los ángulos de un triángulo).*

*Con el **teorema del coseno** no tenemos este "problema" ya que el **signo del coseno** nos indica en que **cuadrante** estaría el ángulo. Por eso cuando conocemos los 3 lados, se suele utilizar el teorema del coseno dos veces, aunque sea un poco más largo.*

2.2-. Dos ángulos y un lado

Si conocemos 2 ángulos y un lado, estamos en el caso más sencillo.

Basta con **obtener el valor del otro ángulo**, y luego aplicar **dos veces el teorema del seno**.



$$\hat{B}=180-60-50=70^o$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{a}=\frac{sen\,\hat{B}}{b}$$
$$\frac{sen\,50}{a}=\frac{sen\,70}{9}$$
$$a=\frac{9\,sen\,50^o}{sen\,70^o}=7,33\,cm$$

$$\frac{sen\,\hat{C}}{c}=\frac{sen\,\hat{B}}{b}$$
$$\frac{sen\,60}{c}=\frac{sen\,70}{9}$$
$$c=\frac{9\,sen\,60^o}{sen\,70^o}=8,29\,cm$$

2.3-. Dos lados y el ángulo comprendido entre esos lados.

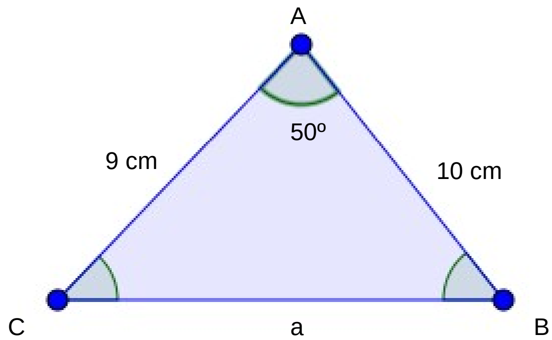
Puede pasar que nos den dos lados y el ángulo comprendido entre esos dos lados.

1º En este caso empezaremos utilizando el **teorema del coseno para calcular el lado que falta**.

2º Y luego usaremos el **teorema del seno para obtener otro ángulo**.

Al igual que antes, al usar el teorema del seno para obtener un ángulo, tendremos que **comprobar los dos cuadrantes.**

3º Obtenemos el valor del ángulo restante.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$a=\sqrt{9^2+10^2-2\cdot 9\cdot 10\cos 50}$$
$$a=8,08\,cm$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{a}=\frac{sen\,\hat{B}}{b}$$
$$\frac{sen\,50^o}{8,08}=\frac{sen\,\hat{B}}{9}$$
$$sen\,\hat{B}=\frac{9\,sen\,50^o}{8,08}=0,853$$
$$\hat{B}=arcsen\,0,854=58,56^o$$
$$\cancel{\hat{B}=arcsen\,0,854=121,44^o}$$

$$\hat{C}=180-58,56-50=71,44^o$$

$$\cancel{\hat{C}=180-121,24-50=8,76^o}$$

En este caso la segunda opción no sirve, porque al comprobar el teorema del seno usando el ángulo C, la longitud de los lados no coincide con las que ya tenemos.

Siempre que tenemos conocemos los 3 lados, la solución es única (no podemos tener dos soluciones diferentes). Es decir, o es una pareja de ángulos o es la otra.

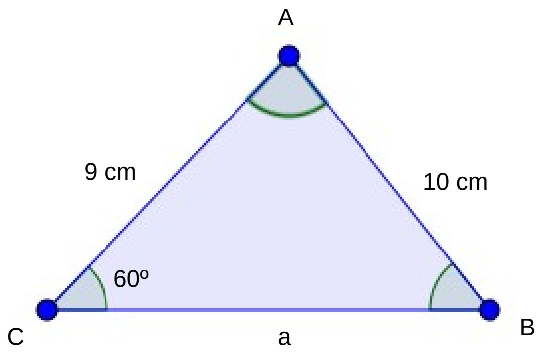
2.4-. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

El último caso que se nos puede presentar es cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. En este caso, lo último que sacaremos es el último lado por lo que **en este caso sí que puede obtener dos soluciones.**

1º Para resolver estos triángulos tenemos que empezar por el **teorema del seno** (es más sencillo que despejar un lado del teorema del coseno).

2º Una vez que obtenemos el ángulo (los dos ángulos), **calculamos el otro ángulo**.

3º Finalmente aplicamos de nuevo el **teorema del seno** (o del coseno) para calcular el lado que falta.



$$\frac{sen\,\hat{C}}{c}=\frac{sen\,\hat{B}}{b}$$
$$\frac{sen\,60^o}{10}=\frac{sen\,\hat{B}}{9}$$
$$sen\,\hat{B}=\frac{9\,sen\,60^o}{10}=0{,}779$$
$$\boldsymbol{\hat{B}=arcsen\,0{,}779=51{,}207^o}$$
$$\cancel{\boldsymbol{\hat{B}=arcsen\,0{,}779=128{,}79^o}}$$

Como 128,79+60º(el ángulo que sabemos) suman más de 180º y eso es imposible, este ángulo no es solución.

$$\boldsymbol{A=180-51{,}207-60=68{,}793^o}$$

$$\frac{sen\,\hat{A}}{a}=\frac{sen\,\hat{C}}{c}$$
$$\frac{sen\,68{,}793^o}{a}=\frac{sen\,60^o}{10}$$
$$\boldsymbol{a=\frac{10\,sen\,68{,}793^o}{sen\,60^o}=10{,}765\,cm}$$