TEMA 1: NÚMEROS REALES

1.1 Clasificación de los números reales.

Realiza un gráfico de clasificación, en el círculo interior irán los números naturales, el siguiente círculo (que incluye al anterior) están los números enteros negativos incluyendo el 0, en el siguiente las fracciones y números decimales, en un círculo externo números irracionales. Todos juntos forman los números reales.

No olvidemos:

1) Los números racionales se pueden expresar en forma de fracción, es decir, como cociente de dos números enteros. En su forma decimal tiene una expresión decimal finita o periódica (*¿debemos recordar el paso de decimal a fracción?*)

$$x \in Q \Leftrightarrow \text{existen } a, b \in Z \text{ tales que } x = \frac{a}{b}$$

2) Los números con expresión decimal infinita no periódica no se pueden expresar en forma de fracción, se les llama **números irracionales**., cuyo conjunto se representa mediante II. Los más conocidos son:

a) Radicales: cualquier raíz n-sima de un nº entero que no sea potencia n-sima exacta: $\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$, ...

b) El **número áureo** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

c) El número π, como cociente entre la longitud de la circunferencia (perímetro) y su diámetro. Utilizamos como valor aproximado 3´14 ó 3´1416.

d) El número e, cuyo valor es e = 2´718281.... Nosotros lo veremos aparecer en los logaritmos, límites, ..

3) El conjunto formado por los números racionales e irracionales se le llama conjunto de los **números reales** y se designa por IR.

4) Cada punto de la recta real es un número racional o irracional, no hay huecos.

Ejercicio 1: Clasifica los siguientes números: -3, 2/5, $\sqrt{3}$, - 8/2, 3´4 y $-\sqrt{9}$ Por ejemplo 2/3 es un número racional y real.

Ejercicio 2: Indica tres números:

a) Que sean naturales no enteros
b) enteros no naturales
c) que sean racionales y no enteros
d) que sean reales y no racionales
e) que sean racionales y enteros

Ejercicio 3: (61) Calcula de forma exacta el resultado de: $0,1\overset{\frown}{2} - 2(0,\overset{\frown}{1} - 0,0\overset{\frown}{2}0) + 0,0\overset{\frown}{3} =$
Ejercicios voluntarios SM: página 24, ejercicio 55, 56, 57.

1.2 Intervalos y semirrectas.

Copia el siguiente cuadro

Nombre	Símbolo	Significado
Intervalo abierto	(a,b)	Números comprendidos entre a y b, $\{x \in \Re / a < x < b\}$
Intervalo cerrado	[a,b]	Números comprendidos entre a y b, estos incluidos $\{x \in \Re / a \le x \le b\}$
Intervalo Semiabierto	(a,b]	$\{x \in \Re / a < x \le b\}$
	[a,b)	$\{x \in \Re / a \le x < b\}$
Semirrecta	$(-\infty, a)$	Números menores que a $\{x \in \Re / x < a\}$
	$(-\infty, a]$	Números menores o iguales que a $\{x \in \Re / x \le a\}$
	$(a, +\infty)$	Números mayores que a $\{x \in \Re / x > a\}$
	$[a, +\infty)$	Números mayores o iguales que a $\{x \in \Re / x \ge a\}$

Ejercicio 4: Representa en la recta real y reescribe los siguientes conjuntos:
a) [-2,5) U (3,7] b) $(-\infty,0)$U(-1, 3) c) [-2,5) $\cap$ (3,7] d) $(-\infty,0)\cap(-1, 3)$
Ejercicios voluntarios SM: página 24, ejercicio 82, 84

1.3 Valor absoluto de un número real.

El **valor absoluto** de un número real a, es el propio número a si es positivo, o su opuesto, -a, si el negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5: Hallar el valor absoluto de: 7´4, 0, -5´87, $\sqrt{9}$, $1-\sqrt{3}$

Ejercicio 6: Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $|x| = 3$ b) $|x| = 0$ c) $|x-2| = 7$ d) $|3x-2| = 6$

Ejercicio 7: Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:
a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x-2| \le 3$
d) $|2x+5| < 7$ e) $|2-3x| \le 3$ f) $|x| \ge 3$
g) $|2x+5| > 7$ h) $|1-x| \ge 4$ i) $|3x+4| \ge 2$

Ejercicio 8: Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$ b) $|\pi|$ c) $|-\sqrt{5}|$ d) $|0|$ e) $|3-\pi|$ f) $|3-\sqrt{2}|$

g) $|1-\sqrt{2}|$ h) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ i) $|7-\sqrt{50}|$

Ejercicio 9: Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x|=5$ b) $|x|\leq 5$ c) $|x-4|=2$

d) $|x-4|\leq 2$ e) $|x-4|>2$ f) $|3-2x|>7$

g) $|3x+2|<5$ h) $|x-4|>-2$ i) $|3x+1|\geq 8$

Ejercicio 10: Desarrolla las siguientes expresiones eliminando los valores absolutos:

a) $|2x-4|+x=$ b) $|2x|+x=$

c) $|6-2x|+x-1=$ d) $(x-2)^2-|x-2|=$

Si quieres repasar las ecuaciones y las inecuaciones con valor absoluto, podrás encontrar un vídeo en la página web, en el apartado apuntes, dentro de la unidad 1.

Ejercicios voluntarios SM: página 24, ejercicio 62,64

1.4 Potencias y radicales. Propiedades.

Recordemos la definición de potencia y sus propiedades. Se define **potencia a^n**, con a base un número real y n exponente un número natural, como un producto de n factores iguales a la base. $a^n = a.a.....a$. También se define $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Para el cálculo de potencias, necesitamos recordar las siguientes propiedades:

1) Producto de potencias de la misma base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) Cociente de potencias de la misma base $a^m : a^n = a^{m-n}$
3) Potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{nm}$
4) Potencia de un producto $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5) Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6) Potencia de un cociente de exponente negativo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
7) $a^1 = a$
8) $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si n es par} \\ -1 \text{ si n es impar} \end{cases}$

Ejercicio 11: Efectúa:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

d) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} =$

e) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2} =$

f) $\left(\frac{-3}{2}\right)^{0} =$

g) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$

h) $\left[\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}\right]^3 =$

i) $-\left(\frac{-3}{2}\right)^{-4} =$

j) $\dfrac{2^3 \,.\, 2^5}{2^{-3} \,.\, 2^{-5} \,.\, 2^{-2}} =$

k) $\dfrac{2^3 \,.\, 2^5 \,.\, 2^{-4} \,.\, 3^2 \,.\, 3^5}{3^7 \,.\, 2^{-2} \,.\, 5^{-3}} =$

l) $\dfrac{24 \,.\, 35^{-2} \,.\, 21}{15 \,.\, 63^{-1}} =$

Ejercicios voluntarios SM: página 24, ejercicio 76

Se define la **raíz enésima** de un número "a" como un número real "b" cuya potencia enésima es "a".

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$

Observaciones:

1) No existe la raíz de índice par de un número negativo.
2) La raíz enésima no es más que una potencia con exponente en forma de fracción: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
3) Tener en cuenta que $\sqrt[n]{a^n} = a$

Propiedades:

a) Producto de raíces: $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,.\,b}$

b) División de raíces: $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$

c) Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \left(\sqrt[n]{a^p}\right)^m = \sqrt[n]{a^{p.m}}$

d) Raíz de una raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

Ejercicio 12: Calcula el valor de las siguientes raíces:

$\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[4]{48}$, $\sqrt[4]{-16}$, $-\sqrt{49}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt[20]{-1}$, $\sqrt[4]{-2}$, $-\sqrt[4]{1296}$, $\sqrt{\dfrac{9}{4}}$, $\sqrt[20]{1}$

Ejercicio 13: Expresa en forma de potencia: $\sqrt[5]{2^3}$ $\quad \sqrt[7]{(-2)^5}$ $\quad -\sqrt[3]{5^4}$ $\quad \sqrt[7]{4^3}$

Ejercicio 14: Expresa las siguientes potencias de exponente fraccionario en forma de radicales: $2^{5/3}$, $4^{6/5}$, $(-3)^{3/7}$, $-7^{4/3}$, $7^{-4/3}$

Ejercicio 15: Introduce el coeficiente bajo el signo radical: $6\sqrt{3}$, $xy\sqrt{2}$, $xy^2\sqrt{3}$, $2^3\sqrt[4]{3}$

Ejercicio 16: Hallar el cuadrado de los siguientes números, expresando las potencias de exponente racional en forma de raíz: $2\sqrt{3}$, $2.3^{\frac{1}{3}}$, $2^4\sqrt[3]{2}$, $5^2.\,2^{\frac{1}{4}}$, $a.\sqrt{5}$

Ejercicio 17: Expresa en una sola raíz, simplificando cuando sea posible:

$$\sqrt{\sqrt{2^3}} \qquad \left(\sqrt{\sqrt[3]{2^5}}\right)^2 \qquad \sqrt{\left(\sqrt{2^{30}}\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8 \qquad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} \qquad \sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^6}$$

La suma de raíces no se realiza mediante propiedades, tan sólo teniendo en cuenta que solo podemos sumar (restar) radicales que tengan el <u>mismo índice</u> y el <u>mismo radicando</u>.

Ejercicio 18: Hallar las siguientes sumas de radicales:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} =$
b) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$
c) $2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{125} =$
d) $2\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 3\sqrt{12} =$
e) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{16} + 2\sqrt{18} + 3\sqrt[3]{2} =$
f) $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{250} =$

Ejercicio 19: Calcular los siguientes productos:

a) $\sqrt[3]{12}\,.\,\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{2}\,.\sqrt{34}\,.3\sqrt{12}$ c) $\sqrt[4]{8}\,.\,\sqrt[4]{2}$
d) $\sqrt[3]{2^5}\,.\sqrt[4]{2^3}$ e) $2\sqrt{3}\,.3\sqrt{2}\,.8\sqrt{6}$ f) $-2\sqrt[3]{3}\,.(-3).2\sqrt[3]{9}$
g) $\sqrt{2}\,.(6 + 3\sqrt{2})$ h) $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(2+\sqrt{2})$ i) $(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{3})$
j) $(2\sqrt{3} - 4)(2\sqrt{3} + 4)$ k) $(2\sqrt{3} - 4)^2$

Ejercicio 20: Calcular los siguientes cocientes:

a) $\sqrt{256} : \sqrt{729}$ b) $\sqrt{216} : \sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$
d) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[6]{27} : \sqrt[4]{9}$ h) $\sqrt[6]{625} : \sqrt[4]{25}$

Racionalizar es transformar fracciones con raíces en el denominador en fracciones sin raíces en el denominador. Si no recuerdas como racionalizar puedes mirar este vídeo https://www.youtube.com/watch?v=1RxpHLIcQUk. Tenemos que distinguir dos casos:

a) *Caso 1*: En el denominador hay una única raíz.
b) *Caso 2*: En el denominador hay una suma de dos raíces cuadradas o un número y una raíz cuadrada.

Ejercicio 21: Racionaliza las siguientes fracciones y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} =$ c) $\frac{-3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} =$ d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

e) $\frac{-2\sqrt{3}}{3\sqrt{75}}$ f) $\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{18}}$ g) $\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{125}} =$ h) $\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} =$

Ejercicio 22: Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} =$ b) $\frac{5}{2 - \sqrt{3}} =$ c) $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} =$ d) $\frac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

e) $\frac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} =$ f) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} =$ g) $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}$ h) $\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}$

Ejercicio 23: Calcula:

a) $\frac{2}{2 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} =$ b) $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{2}} =$

Ejercicios voluntarios SM: página 24, ejercicio 77 al 81.