Recuerda, lo que está en azul no tienes que copiarlo si no quieres.

TEMA 2: ARITMÉTICA MERCANTIL

2.1 Logaritmos.
2.2 Aumentos y disminuciones.
2.3 Interés simple y compuesto. T.A.E.
2.4 Anualidades de capitalización.
2.5 Anualidades de amortización.

2.1 Logaritmos.

Si $a>0$ y $a\neq 1$, se llama **logaritmo en base a** de P, y se designa por decir, $\log_a P = x \Leftrightarrow a^x = P$.

Ejercicio 1: Calcula los siguientes logaritmos (sin calculadora):

$\log_2 8$	$\log_2 1/8$	$\log_5 25$	$\log_5 1/25$	$\log_{10} 10.000$	$\log_{10} 0'00001$
$\log_2 1$	$\log_4 1$	$\log_7 7$	$\log_2 2$	$\log 0$	$\log(-10)$

Para poder facilitarnos el cálculo de los logaritmos utilizaremos las siguientes propiedades:

a) $\log_a (P.Q) = \log_a P + \log_a Q$

b) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^n = n\log_a x$

d) $\log_a 1 = 0$

e) $\log_a a = 1$

f) $\log_a \sqrt[n]{P} = \dfrac{\log_a P}{n}$

g) $\log_a P = \dfrac{\log_b P}{\log_b a}$ cambio de base

h) Con $a > 1$, si $P< Q$ entonces $\log P < \log Q$

No es una propiedad, pero es importante recordar que no existe el logaritmo de "0" ni de un número negativo, sea quien sea la base.

Hay dos bases más importantes, base 10 y base e = 2´718. Al primero se le llama logaritmo decimal, se designa por log sin indicar la base, y al segundo **logaritmo neperiano**, se designa por LnP o lnP.

Ejercicio 2: Escribe las propiedades de los logaritmos para el logaritmo neperiano.

Ejercicio 3: Hallar la parte entera de los siguientes logaritmos (sin la calculadora):

$\log_2 100$ $\log 650$ $\log_3 40$ $\log_7 40$

Ejercicio 4: Escribe en forma de logaritmo de base 10 los siguientes números:

Ejemplo 1 = log10 2 = 3 = -1 = 0 =

Ejercicio 5: Sabiendo que $\log_2 A = 3'5$ y $\log_2 B = -1'4$, calcular $\log_2 \dfrac{AB}{4}$, $\log_2 \dfrac{2\sqrt{A}}{B^3}$

Ejercicio 6: Averigua le relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica: $Lny = x + Ln7$

Ejercicio 7: Halla los siguientes logaritmos:

a) Con calculadora, aproximando hasta las milésimas: $\log_5 80$, $\log_{12} 100$.

b) Sin calculadora: $\log_2 16$, $\log_2 0{,}25$, $\log_9 1$, $\log_{10} 0{,}1$, $\log_4 64$, $\log_7 49$, $\mathrm{Ln}\, e^4$, $\mathrm{Ln}\, e^{-\frac{1}{4}}$, $\log_5 0{,}04$, $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

Ejercicios voluntarios SM: página 46, ejercicio 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60.

2.2 AUMENTOS Y DISMINUCIONES.

Este apartado habla de porcentajes, pero lo vamos a trabajar de una forma mucho más sencilla. Vamos a utilizar los decimales y la calculadora. Coge cuatro números detrás de la coma, no olvides mirar el quinto número para redondear. Cuando estábamos en secundaria, si me decían que el precio de una camisa aumenta el 15%, primero calculábamos el 15% y después lo sumábamos. ¿Es necesario? No, es mucho más fácil si el precio de la camisa la multiplicamos por 1,15 ¿por qué? Sigue leyendo y copia lo que viene debajo de esta línea.

C es la cantidad de la cual queremos aplicar un aumento o disminución, por ejemplo, el precio de una camisa. Los porcentajes se pueden hacer con regla de tres, calculando el % sumando o restando, pero es necesario que a partir de ahora comprendamos que:

a) Si aumentamos un 12% el precio de $C \rightarrow C + \frac{12}{100}C = C + 0'12\ C =$ **1,12 C**, no necesitamos calcula el 12 % y sumarlo, simplemente multiplicamos por 1,12.

b) Si disminuimos un 12% el precio de $C \rightarrow C - \frac{12}{100}C = C - 0'12\ C =$ **0,88 C**, no necesitamos calcula el 12 % y restarlo, simplemente multiplicamos por 0,88.

En general:

a) Si C_i tiene un aumento porcentual del r%, calculamos $C_f = C_i \cdot k$ siendo $k = 1 + \frac{r}{100}$ y se llama **índice de variación**.

b) Si C_i tiene una disminución porcentual del r%, calculamos $C_f = C_i \cdot k$ siendo $k = 1 - \frac{r}{100}$ y se llama **índice de variación**.

c) Si tenemos un encadenamiento de aumentos y disminuciones, calculamos $C_f = C_i \cdot k$ siendo $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \ldots$ Encadenamiento quiere decir que hay varios aumentos y/o disminuciones seguidos, y no tenemos que calcular de uno en uno, podemos hacerlo todo de una vez calculando $k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \ldots$

Ejercicio 8: Di cuál es la variación porcentual (indica si es aumento o disminución) que corresponde a cada uno de los siguientes índices de variación (los apartados a y b sirven de guía para que sepas lo que tienes que hacer):

a) $k = 1'235 \rightarrow 1'235 - 1 = 0'235 \rightarrow 0'235 \cdot 100 = 23'5 \rightarrow$ 23,5 % de aumento.

b) $k = 0{,}93 \rightarrow 1 - 0{,}93 = 0'07 \rightarrow 0'07 \cdot 100 = 7 \rightarrow$ 7 % de disminución.

c) 0´765

d) 1´15

e) 1´2

f) 1´042

g) 0´85

h) 0´8

i) 0´958

j) 2,35

Ejercicio 9: ¿En cuánto se transforma 250 € si aumenta un 23%? ¿Y si aumentamos el 10%? ¿Y para el 20%? ¿Y para el 6%? ¿Y para el 6´5%? ¿Y para el 0´3%?
Si 250 € aumenta un 23% → 250 · 1,23 = 307,5 €

Ejercicio 10: ¿En cuánto se transforma 250 € si disminuye un 23%? ¿Y si disminuye el 10%? ¿Y para el 20%? ¿Y para el 6%? ¿Y para el 6´5%? ¿Y para el 0´3%?
Si 250 € disminuye un 23% → 250 · 0,77 = 192,5 €

Ejercicio 11: Completa la siguiente tabla, observa bien la primera fila que te servirá de guía: C_i es la cantidad inicial (lo que tenemos) y C_f la cantidad que obtenemos después del aumento o la disminución.

C_i	r %	Aumento	C_f	Disminución	C_f
2.350	45	1,45	3.407,5	0,55	1.292,5
4.500	37				
	25		2.500		
5100				0,76	
123.000		1,06			
120					75
350			395,5		

Problema resuelto: Hay que copiarlo. Pusimos un capital de 3.600 € en el banco. En un año después se había transformado en 3.794´4 € ¿Qué tanto por ciento ha aumentado? No mires la resolución, piénsalo, hazlo y después compara con el siguiente proceso:

Para obtener k realizamos $k = \frac{3794'4}{3.600} = 1{,}054$ → 1,054 – 1 = 0,054 → 0,054 x 100 = 5,4 → por tanto el <u>aumento</u> es de 5,4%
¿Es más rápido este proceso o el que vosotros habéis hecho?

Ejercicio 12: Di cuál es la variación porcentual que corresponde a cada una de las siguientes transformaciones (para ello calculamos $k = \frac{C_f}{C_i}$):

Antes	Después	k	%	Aumento o disminución
8.000 €	9.360 €			
12.560 €	11.932 €			
12.000 personas	10.320 personas			
23.500 kilos	31.725 kilos			

Problema resuelto: Hay que copiarlo. El precio de la gasolina desde principio de año ha tenido los siguientes aumentos y disminuciones: el 2 de enero aumenta un 3%, el 4 de febrero disminuye un 2%, el 28 de febrero disminuye un 4%, el 20 de marzo aumenta un 5%, el 20 de abril aumenta un 3%, el 4 de junio aumenta un 2%, el 10 de julio aumenta un 3% y el 21 de agosto aumenta un 4%. Calcula el coste final si a principios de año valía 0´72 €.

$C_f = C_i \,.\, k_1 \,.\, k_2 \,.\, k_3 \ldots. K_8$ = 0´72 . (1´03 . 0´98 . 0´96 . 1´05 . 1´03 . 1´02 . 1´03 . 1´04) = 0´72 . 1´145069 = 0´8244 € → Por tanto el precio final de la gasolina es de 0,8244 €

Ejercicio 13: A principios del año 1998 el precio de las gasolina es de 1´27 € y ha sufrido las siguientes variaciones a lo largo de la década pasada, en 1998 aumentó un 1´5%, en 1999 aumentó un 0´8%, en 2000 aumentó un 1´2%, en 2001 disminuyó un 1%, en 2002 aumentó un 0´5%, en 2003 disminuyó un 0´65%, en 2004 aumentó un 0´65%, en 2005 aumentó un 0´2%, en 2006 disminuyó un 0´58% y en 2007 aumentó un 0´9%, ¿Cuál es el precio actual de la gasolina?

Ejercicio 14: Después de subir un 20%, un artículo vale 45,60 €. ¿Cuánto valía antes de la subida?

Ejercicio 15: Después de rebajarse en un 35%, un artículo vale 81,90 €. ¿Cuánto valía antes de la rebaja?

Ejercicio 16: Un vehículo costaba el año pasado 12.540 € y este año se vende a 12.976 €, ¿cuál es el índice de variación?, ¿y el aumento porcentual?

Ejercicio 17: Si el precio del alquiler de un apartamento sube un 10% cada año, ¿cuántos tardará en duplicarse?

Ejercicio 18: Un colchón cuesta 525 €, lo rebajan un 20%. Posteriormente le suben un 20%. ¿Cuál es su precio actual?

2.3 INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO (TAE).

Recuerda que en esta unidad conocerás cuatro fórmulas para calcular hipotecas o planes de pensiones, en este apartado explicaremos el interés simple y el compuesto. Antes de que empieces a copiar, ten cuidado con r, a veces r = 15% y a veces r representa a 0,15 (forma decimal).

Lo que se gana por el dinero depositado (capital) en el banco se llama **intereses**, en caso de préstamo de dinero, nos cobrará esos intereses. Al tanto por ciento anual que paga un banco por depositar en él un dinero se llama **rédito**. Si quieres antes ver un vídeo, puedes ver para interés simple https://www.youtube.com/watch?v=A_CwrvLAETc y para el interés simple puedes ver https://www.youtube.com/watch?v=0l-_ZKwLoYY

a) En el **interés simple** las ganancias se retiran y no se acumulan al capital que las ha generado. ¿Cómo se calcula el interés? $I = C \,.\, r \,.\, t$ siendo C el capital, r el % que me conceden en forma decimal (i) y t el tiempo en años. De forma que $C_f = C_i + I$

b) Si un capital está a **interés compuesto**, al final de cada unidad de tiempo las ganancias del capital se acumulan al capital que las ha generado para producir a su vez nuevos intereses (beneficios). Dichos intereses dependen del periodo de capitalización (No siempre los intereses los cobro o los pago en un periodo de un año, a veces lo negociamos para que sea semanal o trimestral, etc) se calculan teniendo en cuenta:

B1) Periodo de capitalización anual, el capital final será $C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$ siendo r interés, t años y C_i el capital inicial.

B2) Periodo de capitalización mensual, el capital final será $C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{1200}\right)^m$ siendo r interés, m el número de meses y C_i el capital inicial.

B3) periodo de capitalización trimestral, el capital final será $C_f = C_i \cdot \left(1+\frac{r}{400}\right)^{tr}$ siendo r interés, tr número de trimestres y C_i el capital inicial.

B4) En las cuentas de ahorro ocurre que si los periodos de capitalización son inferiores a un año, los intereses anuales producidos por el capital son superiores al rédito que declara el banco. Es lo que se denomina **T.A.E.** o **tasa anual equivalente**.

Ejercicio resuelto:

a) Calcula las ganancias que nos genera un capital de 10.000 € al 5% de **interés simple** anual en 3 años.

Calculamos los intereses $I = C \cdot r \cdot t = 10.000 \times 0'05 \times 3 = 1.500$ estas son los intereses (las ganancias) Por tanto nuestro capital final será $C_f = 10.000 + 1.500 = 11.500$ €

b) Calcula las ganancia que nos genera un capital de 10.000 € al 5% de interés compuesto anual en 3 años.

Calculamos directamente el capital final $Cf = Ci \times \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$ -> $Cf = 10.000 \times (1 + 0'05)^3 =$ 11.576´25 €, es decir, nos aporta unas ganancias de 1.576´25 €

Recuerda que en cada ejercicio debes copiar la fórmula, después la fórmula con los números que corresponden al ejercicio y finalmente el resultado que te de la calculadora.

A través de estos ejemplos podéis observar que es más rentable el interés compuesto, a partir de estos ejercicios siempre hablaremos de interés compuesto y cuando nos queramos referir al simple lo especificaremos. Lo que hemos hecho en los apartados anteriores tiene que ver con el interés compuesto, observa que si el interés es al cabo de un año $C_f = C_i \cdot k$, si son dos años $C_f = C_i \cdot k \cdot k$, en resumen:

Ejercicio 19: Escribe la fórmula del interés compuesto en caso de periodo de capitalización diario.

Ejercicio 20: Si tenemos un capital de 50.000 €, completa la siguiente tabla con las cantidades obtenidas transcurridos un número determinado de años:

Al 12 %	1 año	2 años	3 años	4 años	5 años

Ejercicio 21: Averigua en cuánto se transforma un capital de 100.000 € al 6% anual durante 4 años si los periodos de capitalización son:

C_i	Años	meses	Días	Trimestres
100.000 €				

¿Qué periodo de capitalización nos conviene más? ________________

Ejercicio 22: ¿En cuánto se transforma un capital de 3.500 € depositados durante tres meses al 8,5% anual? ¿Y si se mantiene 5 años con periodo de capitalización trimestral?

Ejercicio 23: Si depositamos 500 € al 6% anual, durante 2 años, con periodo de capitalización mensuales. ¿Cuánto pagará el banco al final de los dos años?

Ejercicio 24: Si depositamos 1.000 € durante 80 días al 14% de interés anual, con periodo de capitalización diario. ¿En cuánto se convierte?

En el ejercicio 21 has visto que la misma cantidad en el mismo periodo, 4 años, nos ha dado diferentes intereses, a menor tiempo periodo de capitalización, mayor intereses recibimos. Esta situación se traduce en una nueva definición: TAE (Tasa anual equivalente). Es decir, cuando el periodo de capitalización es menor al año, los beneficios que obtenemos corresponden a un porcentaje mayor, llamado TAE, ¿cómo calculamos el TAE?

TAE es la **tasa anual equivalente**, para calcular el TAE simplemente tenemos que calcular $\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{12}$ si el periodo es mensual, $\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4}$ si es trimestral y así sucesivamente.

Problema resuelto: Calcula el TAE correspondiente al ejercicio 22 y al 23:

a) En el ejercicio 23 tenemos un periodo mensual, por ello debemos calcular $\left(1+\frac{6}{1200}\right)^{12}$ = 1,06167 → 1,06167 – 100 = 0,06167 → 0,06167x100 = 6,167 →TAE 6,167%. Quiere decir que cuando nos dan un 6% con periodo mensual es lo mismo que darnos un 6,167% con periodo anual.

b) En el ejercicio 24 tenemos un periodo diario para ello debemos calcular $\left(1+\frac{14}{36500}\right)^{365}$ = 1,1502 →1,1502 – 100 = 0,1502 → 0,1502x100 = 15,02→ 15,02% es el TAE, es decir, ganamos lo mismo con un 14% con periodo diario que si lo ponemos al 15,02% con periodo anual.

Ejercicio 25: Un banco da el 8% de interés anual pagadero en periodo de capitalización mensual:

a) Si depositamos 400 € en un año, ¿qué capital obtenemos?

b) ¿Qué TAE ofrece el banco?

Ejercicio 26: Calcula el tanto por ciento anual al que se han de colocar 600 € para que en dos años se conviertan en 699,84 €.

Ejercicio 27: ¿En cuántos años, 236 € colocados al 5% de interés compuesto se convertirán en 316´25 €?

Ejercicio 28: Calcula el capital obtenido, tras un año, de un capital de 5.000 € al 10% con periodo de capitalización mensual. Calcula el TAE correspondiente.

Ejercicio 29: Decidimos hacer una inversión de 10.000 € y la entidad financiera decide darnos un 6,5% anual. Calcula cuánto dinero obtendremos después de dos años:

a) Si nos dan un interés simple.
b) Período de capitalización anual.
c) Período de capitalización semestral.
d) Período de capitalización mensual.
e) Período de capitalización diario.
f) ¿Cuál es el T.A.E. correspondiente en el apartado c, d y e?
g) ¿Cuál es el período de capitalización más interesante?

2.4 Anualidades de capitalización.

Son cantidades iguales que se abonan al principio de cada año a una entidad financiera para formar, junto con sus intereses compuestos, un determinado capital al cabo de un número de años. De esta forma tendremos que:

$C_f = A\,(1 + i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ A = anualidad de capitalización, i es r en forma decimal, n número de años.

Ejercicio 30: Luis decide ingresar 8.000 € cada año al 5% para retirarlo dentro de 15 años. ¿Cuánto dinero recibirá?

Ejercicio 31: Un ciudadano ingresa en el banco todos los años en la misma fecha 1.500 € en una cuenta que le produce el 6% anual. ¿Qué cantidad habrá acumulado al cabo de 3 años?

Ejercicio 32: Un trabajador ahorra 5.000 € anuales que ingresa en el banco al principio de cada año. Si el banco le da un 9´5% de interés, ¿qué cantidad tendrá al cabo de una década?

Ejercicio 33: Una señora decidió cuando cumplió 35 años ingresar todos los años 2.000 € hasta que se retire de trabajar. Una sociedad gestora le garantizó el 5´4% de interés anual. Si retiró 106.338´76 €. ¿Con qué edad dejó de trabajar?

Ejercicio 34: Una señora decidió cuando cumplió 35 años ingresar todos los años una cantidad fija hasta que se retire de trabajar. Una sociedad gestora le garantizó el 5´4% de interés anual. Si retiró 60.800 € a los 60 años. ¿Qué cantidad ingresó cada año?

Ejercicio 35: En un banco se oferta un plan de jubilación con un rédito del 5% fijo, durante el período de vida del plan. Una persona está interesada en obtener un capital final de 250.000 € dentro de 30 años, que es el tiempo que le falta para jubilarse. ¿Qué anualidad de capitalización debe aportar al principio de cada año?
Ejercicio 36: Una persona ingresa en un plan de jubilación 2.000 € al principio de cada año. La compañía de seguros le genera un interés del 6% fijo anual, durante toda la vida del plan. ¿Qué capital se habrá formado al final de los 15 años?

2.5 Anualidades de amortización.

Son cantidades iguales que se abonan al final de cada año (o unidad de tiempo) a una entidad financiera, para pagar el importe de una deuda contraída y los intereses compuestos cargados por su deuda.

$A = \frac{D.i(1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$ A = anualidad, D = deuda contraída, $i = \frac{r}{100}$, t = años

Si fuese mensualidad tendríamos $M = \frac{D.\frac{i}{12}\left(1+\frac{i}{12}\right)^m}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^m - 1}$ M = mensualidad, D deuda, $i = \frac{r}{100}$ tanto por uno, m el número de meses.

Ejercicio 37: Hemos solicitado un préstamo de 200.000 € al 6´5% anual para devolverlo durante 8 años. ¿Qué cantidad anual hemos de pagar para amortizar el préstamo?

Ejercicio 38: Hemos solicitado una hipoteca de 100.000 € a nuestro banco, y deseamos pagarla en periodos anuales. El banco nos la ha concedido al 3´8% de interés anual. Debiendo pagar por ello 14.730 € cada año. ¿Cuántos años tardaremos en amortizar la hipoteca?

Ejercicio 39: Para amortizar un préstamo de 50.000 € al 9% anual fijo en el plazo de 15 años, ¿qué cantidades fijas e iguales debe pagar al final de cada año para amortizar la deuda?

Ejercicio 40: Un ayuntamiento contrae una deuda de 20 millones de euros que debe amortizar en el plazo de 40 años. El rédito fijo anual es del 5%. ¿Qué cantidad debe abonar cada año?

Ejercicio 41: Luis se compra una moto de 1.200 €, para ello pide un préstamo por su totalidad al 5% anual que pagará en mensualidades de 35´97 €. ¿Cuánto tiempo tardará en pagarla?

Ejercicios voluntarios del libro: página 46, ejercicios: 53, 54, 55, 57, 61 al 66, 72 al 79 y 81.