

Tema 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

4.1 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES, CUADRÁTICAS Y REDUCIBLES A ELLAS.

a) Ecuación de segundo grado, si tienes dudas, mira este vídeo de ecuación de segundo grado completa <https://www.youtube.com/watch?v=LQ2RguI8nXA> ecuación de segundo grado incompleta <https://www.youtube.com/watch?v=dEwGgYbK6bY> y <https://www.youtube.com/watch?v=uIl2MYAUrXk>:

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado por el método más adecuado:

a) $25x^2 - 16 = 0$

c) $x^2 + 3x = 0$

e) $x^2 + 3x + 1 = 0$

g) $\frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$

i) $(5x - 3)^2 - 5x(4x - 5) = 5x(x - 1)$

b) $x^2 + 1 = 0$

d) $3x^2 + 2x = 0$

f) $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$

h) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

Soluciones:

a) $\pm 4/5$

b) no tiene

c) 0, - 3

d) 0, - 2/3

e)

f) ± 2

g) 0, 13

h) infinitas soluciones

i) no tiene.

b) Ecuaciones bicuadráticas que son de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, se resuelven haciendo el cambio $t = x^2$. Si tienes dudas mira este vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=mwOU-AGJtdY>.

Ejercicio 2: Resuelve las siguientes bicuadradas:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

e) $9x^4 - x^2 = 0$

f) $(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8$

Soluciones: a) $\pm 2, \pm 1$

b) ± 1

c) no tiene

d) $\pm 2\sqrt{2}, \pm 1$

e) 0, $\pm 1/3$

f) $\pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{2}$

c) Ecuaciones con radicales: Son aquellas en las que la incógnita aparece bajo al signo radical (raíz cuadrada). Para resolverlas es necesario elevar al cuadrado, aunque en primer lugar debemos dejar la raíz sola, si es posible. Una vez resuelta es fundamental comprobar las soluciones, ya que no todas las soluciones serán válidas. Si tienes

dudas, mira estos vídeos <https://www.youtube.com/watch?v=SF3xUqRHMis> y <https://www.youtube.com/watch?v=rBMzngWO3Ww>

Ejercicio 3: Resuelve las siguientes ecuaciones, **no olvides comprobar las soluciones**:

a) $\sqrt[3]{x+1} = 2$	$x = 7$	b) $\sqrt{x-1} = x-1$	$x = 1, 2$
c) $x + \sqrt{5x+10} = 8$	$x = 3$ (18 no)	d) $\frac{1}{\sqrt{5x+14}} = \frac{1}{7}$	$x = 7$
e) $\sqrt{5x+6} = 3+2x$	$x = -\frac{3}{4}, -1$	f) $x + \sqrt{7-3x} = 1$	$x = -3$

d) Ecuaciones con la x en el denominador: Debemos tener cuidado con las soluciones ya que no serán válidas si anulan al denominador. Si tienes dudas mira este vídeo https://www.youtube.com/watch?v=r_EMdz5cNnQ

Ejercicio 4: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-1}{x} = x-1$	$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	b) $\frac{x-1}{4} = \frac{x+3}{x-2}$	$x = \frac{7 \pm \sqrt{89}}{2}$
c) $\frac{2x}{x-2} = \frac{x}{x+1}$	$x = 0, -4$	d) $\frac{3}{x+3} = \frac{x+2}{2-x}$	$x = 0, -8$
e) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$	$x = 6, -3$	f) $\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$	$x = 5, -3$
g) $\frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$	$x = 10, -10$		

e) Ecuaciones factorizables: Para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior a dos, utilizaremos la factorización de polinomios. Si tienes dudas mira este vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=uFuaVplW7S8>

Ejercicio 5: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24 = 0$	$x = -1, -2, -3$ y 4
b) $6x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$	$x = -1/2, 2/3$ y 0
c) $2x^5 + 5x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$	$x = 0, -1, 1/2$ y -2
d) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$	
e) $5x^3 - 3x^2 = 0$	$x = 0, 3/5$
f) $x^4 + 4x^2 = 0$	$x = 0$
g) $x(x^2 - 4)(3x + 12) = 0$	$x = 0, \pm 2, -4$
h) $(x - 5)(x^2 + 1) = 0$	$x = 5$
i) $x^3 + x^2 - 6x = 0$	$x = 0, -2, 3$
j) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$	$x = 0, 1$
k) $x^3 - 9x = 0$	$x = 0, \pm 3$
l) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$	$x = 1, \frac{1}{2}$

$$m) x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

$$x = 1, 3$$

4.2 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

a) Ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente de una potencia. Para resolverlas debemos expresar ambos miembros en forma de potencia con la misma base. Si tienes dudas mira este vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=KrKuhMRjpoE>

Ejercicio 6: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4 \cdot 2^x = 128$	$x = 5$	b) $\frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128$	$x = 11$
c) $\frac{1}{2^{3x+2}} = 2^{3x}$	$x = -1/3$	d) $e^{2x} = e^{x+2}$	$x = 2$
e) $\frac{1}{e^{3x+1}} = e^{2x^2-4x-2}$	$x = 1, -1/2$	f) $e^{x-3} = 1$	$x = 3$
g) $7 \cdot 3^x = 567$	$x = 4$	h) $3^{2x-5} = 2.187$	$x = 6$
i) $(0,5)^x = 16$	$x = -4$		

b) Ecuaciones logarítmicas: No olvides consultar en tu resumen las propiedades de los logaritmos. Si tienes dudas mira este vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=EnHi4XPmfB4>

Ejercicio 7: Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_{10} x + \log_{10} 50 = 3$	$x = 20$	b) $\log_{10} 2 + \log_{10} x = 1$	$x = 5$
c) $\log_{10} x - \log_{10} 3 = 2$	$x = 300$	d) $\log x - 2\log 3 = 1$	$x = 90$
e) $\ln x - 1 = 0$		f) $2\ln x + \ln 3 = 2$	
g) $\log x = \log 15 - \log 2 + \log 3$	$x = 45/2$	h) $\ln(x) = 3 \ln(x)$	$x = 1(\text{no } 0, -1)$
i) $\log x = \log 9 \cdot \log 4$	$x = 9/4$	j) $\ln x = 3 \ln 5$	$x = 125$
k) $3 + 2 \log(x) = 5$	$x = 10$	l) $\frac{1}{3} \log_2 x = -3$	$x = 2^{-9}$

4.3 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN A TRAVÉS DE ECUACIONES.

Ejercicio 8: La ley de la oferta y de la demanda es muy importante. La **ley de la demanda** es el número de unidades que los compradores están dispuestos a adquirir teniendo en cuenta el precio del artículo. Mientras que la **ley de oferta** es el número de artículos que el fabricante está dispuesto a producir en función del precio. Se dice que hay **equilibrio de mercado** si existe un precio para el cual coincide la ley de la oferta y de la demanda. Indica para qué precio se obtiene equilibrio de mercado, con

precios comprendidos entre 80 y 100 €, siendo $f_d(p) = 1,05 p^2 - 202 p + 10.000$ y $f_o(p) = 30 p - 2.000$ siendo p el precio del artículo.

Ejercicio 9: La fórmula $P_f = P_i e^{r t}$, siendo P_f el número final de habitantes, P_i el número inicial de habitantes, t el número de años incluidos en el periodo y r la tasa de crecimiento exponencial de la población. En el año 2000 en España había 40 millones de habitantes, y en el 2010, 46 millones. Halla la tasa de crecimiento exponencial de la población en este periodo.

Ejercicio 10: Rodrigo tiene 54.000 €. Invierte una parte en un negocio y el resto en un banco. En el negocio gana el 12% y en el banco el 3%. Al final ha ganado 4.320 €. ¿Cuánto invirtió en cada sitio?

Ejercicio 11: La suma de tres números consecutivos es 4 veces el menor de ellos. ¿Qué números son?

Ejercicio 12: El caudal de un grifo es de 375 l/h. Dicho grifo ha tardado 40 horas en llenar la piscina. Calcula sus dimensiones sabiendo que tiene 2 m de profundidad y es el triple de larga que de ancha. Nota: Recuerda que $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.

Ejercicio 13: La nota de la materia de Matemáticas se calcula teniendo en cuenta que el 10% es de la actitud y el 90% de la media de las pruebas. Luis tiene un 7 en actitud y ha obtenido en las tres primeras pruebas escritas: 6, 7 y 6. ¿Cuánto debe obtener en la última prueba para tener una nota final de "6"?

4.4 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES.

a) Resolución de sistemas de ecuaciones: Cuando en lugar de una ecuación tenemos dos o más, da lugar a un **sistema de ecuaciones**. Si las ecuaciones son lineales (las incógnitas se suman y son de grado 1), se dice que es un **sistema lineal**. Los sistemas de ecuaciones se resuelven por los métodos que ya conocemos de sustitución, igualación y reducción, tanto en sistemas lineales como no lineales. Antes de resolver el sistema debemos "mejorar" las ecuaciones quitando paréntesis, denominadores, etc si fuera necesario. Si el sistema tiene solución se llama **sistema compatible**. Si hay una, dos o n soluciones se llama **sistema compatible determinado** y si tiene infinitas soluciones se llama **sistema compatible indeterminado**. Si el sistema no tiene solución se llama **sistema incompatible**. Si quieres recordar los métodos de resolución, puedes ver vídeos, para sustitución <https://www.youtube.com/watch?v=vPyPr5od87o&t=16s>, para reducción <https://www.youtube.com/watch?v=BtKnefRH58I&t=12s> y para igualación <https://www.youtube.com/watch?v=8lOhIX9XLCs&t=56s>

Ejercicio 14: Resuelve los siguientes sistemas lineales, cada ejercicio por un método distinto:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 6x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 6x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 15: Resuelve los siguientes sistemas no lineales, cada ejercicio por un método distinto, si es posible:

$$a) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ x \cdot y = 15 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x - y = 0 \\ (x^2 + 1)y^2 = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ \sqrt{4 + x - y} + x = y - 2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{x}{y} = 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

4.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES. INTERPRETACIÓN.

Geoméricamente, resolver un sistema lineal de dos incógnitas es explicar la posición geométrica de dos rectas, si tiene solución única, las dos rectas se cortan en un punto, si es compatible indeterminado, son la misma recta, si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas. En sistemas no lineales la interpretación es variada por ejemplo al resolver $\begin{cases} y = x^2 - x - 6 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$ estamos calculando el punto de corte entre una recta y una parábola.

Ejercicio 17: La suma de dos números es 40. Hállalos sabiendo que el menor más la raíz cuadrada del mayor es 10.

Ejercicio 18: Una oposición consta de dos exámenes: uno escrito, que es el 65% de la nota, y otro oral, que es el 35%. Si un opositor tiene en el escrito un 4, ¿qué nota tiene que sacar en el oral para aprobar?

Ejercicio 19: Por una calculadora y un cuaderno habríamos pagado hace tres días, 10'80 €. El precio de la calculadora ha aumentado un 8% y el cuaderno tiene una rebaja del 10%. Con estas variaciones, los dos artículos nos cuestan 11'34 €. ¿Cuánto costaba cada uno de los artículos hace tres días?

Ejercicio 20: En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/Kg y otra de 8'50 €/Kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea de 7 €/Kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

Ejercicio 21: La edad de un padre es hoy el triple que la del hijo y hace 6 años eran cinco veces la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Ejercicio 22: El perímetro de un rectángulo es de 20 cm y su área de 21 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones?

Ejercicio 23: La diferencia entre un número y el que resulta de invertir el orden de sus cifras es 36 y la suma de las mismas es 10. Calcula dicho número.