TEMA 5: FUNCIONES ELEMENTALES.

5.1 Función real de variable real.
5.2 Operaciones con funciones: composición e inversa.
5.3 Construcción de gráficas de funciones elementales y sus transformaciones.
5.4 Interpolación lineal y cuadrática.

5.1 FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.

Se define **función real de variable real** a una aplicación que a cada elemento x del subconjunto D de IR le hace corresponder un único número real y llamado **imagen.** A x se le llama variable independiente y a y = f(x) se le llama variable dependiente.

$$\begin{array}{ll} f: D \subset IR \longrightarrow & IR \\ \quad x \longrightarrow & f(x) \\ \text{v. indep.} & \text{v. dependiente, imagen de x mediante f.} \end{array}$$

** Deja un espacio (unos 9 cuadrados) para copiar unas gráficas que haremos en clase.

Al conjunto de los números reales que tienen imagen por f se le llama **dominio de f** y se denota por Domf. Domf = $\{x \in IR \ / \ \exists\ y = f(x) \in IR\}$. Al conjunto de números reales que son imagen mediante f se le llama **imagen de f** o **recorrido** y se denota por Imf. Imf = $\{ f(x)$ con $x \in$ Domf $\}$. La **gráfica** de una función f está formada por los pares de puntos (x , f(x)) con $x \in D(f)$.

Para calcular el dominio de una función tendremos en cuenta:

1) No podemos calcular un cociente si en el denominador tenemos "0".
2) No podemos calcular la raíz de índice par de un número negativo.
3) No podemos calcular el logaritmo de 0 o de un número negativo.
4) Tendremos que tener en cuenta el contexto real en la que definimos la función.
5) La propia definición de la función.

Ejercicio 1: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} + \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{4 - 3x}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - 3}}{x - 4}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 6}$

g) $f(x) = e^{\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}}$

h) $f(x) = 5^{2x-1}$

i) $f(x) = Lnx^2 + 1$

j) $f(x) = Ln\dfrac{x+1}{x^2 - 1}$

k) $f(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } x\le 3 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x>3 \end{cases}$

l) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\ge 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

** Puedes ver estos videos: dominio de racionales https://www.youtube.com/watch?v=zodPl_pYbyI, dominio de funciones con raíces https://www.youtube.com/watch?v=ZQp08DzywGw, dominio de funciones logarítmicas https://www.youtube.com/watch?v=l7jMxbAaVcA

Ejercicio 2: Hay un tipo de funciones llamadas **funciones a trozos**. Ejemplo: Un mayorista vende cada caja de tomates a 20 € si el comerciante le compra hasta 10 cajas, a 18 € si le compra más de 10 cajas pero menos de 30 y a 14 € si compra 30 o más cajas. Expresa dichos precios mediante expresión algebraica.

Ejercicio 3: Expresa como una función definida a trozos: f(x) = $2x+|x-1|$
Si no recuerdas como hacerlo puedes ver este vídeo https://www.youtube.com/watch?v=LO9IFgeRX2g

Ejercicio 4: Dada las funciones a trozos:

$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } -6\le x<-3 \\ -2 & \text{si } -1<x<1 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Calcula la imagen de x = 2, 0, -1, -5 mediante f y g.
b) ¿De quién es imagen – 9 mediante f? ¿De quién es imagen 2 mediante g?
c) Calcula el dominio de ambas funciones.

5.2 OPERACIONES CON FUNCIONES.

En la unidad 3 aprendimos a trabajar con expresiones algebraicas, ese aprendizaje lo vamos a aplicar para sumar, multiplicar o dividir funciones, aunque es necesario conocer la notación de forma adecuada:

(f+g) (x) = f(x) + g(x)   (fg) (x) = f(x) g(x)   (f:g) (x) = f(x) : g(x)

Ejercicio 5: Dadas las funciones f(x) = $\dfrac{1-x}{x}$, g(x) = $\dfrac{x+1}{x-2}$, h(x) = $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ y i(x) = $\dfrac{1}{x}$.
Calcula:

a) (f - g)(x)   b) (g . h)(x)   c) (g : i)(x)   d) $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$

Una operación entre funciones muy importante es la composición de funciones, que consiste en obtener una función a partir de la aplicación de dos o más funciones de forma sucesiva: Dadas dos funciones f y g definimos la función **f compuesta con g** como la función que asigna a cada x del dominio de f el número g[f(x)]. Dicha función se denota por gof.

$$f: D \subset IR \longrightarrow IR \qquad \longrightarrow \qquad g: D \subset IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow f(x) \qquad\qquad\qquad x \longrightarrow g(x)$$

$$gof : D \subset IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow gof(x) = g[f(x)].$$

<u>Propiedades</u> de la composición de funciones:

a) Propiedad asociativa: h o (g o f) = (h o g) o f
b) No tiene la propiedad conmutativa: g o f $\neq$ f o g. Ejemplos.

Ejercicio 6: Calcula f o g y g o f, siendo:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Calcula g(f(4))

c) $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

e) $f(x) = x^3 - 6$ y $g(x) = \sqrt[3]{x+6}$.

Otra operación entre funciones muy importante es el cálculo de la función inversa respecto de la composición. Cuando tenemos una función que nos ayuda a predecir el número de habitantes de un país, podemos hacernos la pregunta contraria, ¿cuánto tiempo ha de pasar para tener x habitantes? Para contestar a dicha pregunta necesitamos conocer la función inversa respecto de la composición de dicha función. ¿Qué observas en el apartado e del ejercicio 6? De la definición de composición de funciones podemos obtener la siguiente definición, **la inversa de f respecto de la composición** es otra función, que se denota por f^{-1}, que verifica que $(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = Id(x) = x$.

Para calcular la inversa de una función debemos seguir el proceso siguiente:

1) Escribir la función de la forma y = $\frac{x+1}{x-2}$,

2) Cambiar x por y e y por x, x = $\frac{y+1}{y-2}$,

3) Despejemos "y", x (y - 2) = y + 1 → xy - 2x = y + 1 → Pasa todo lo que tenga y a la izquierda y el resto la derecha, xy - y = 2x + 1 → y (x - 1) = 2x + 1 → y = $\frac{2x+1}{x-1}$,

4) La función resultante será nuestra función inversa, es decir, $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

**Nota: A partir de ahora solo la llamaremos inversa, pero no debes confundir $\frac{1}{f}$ con f^{-1}.

Ejercicio 7: Calcula la inversa respecto de la composición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$

b) $g(x) = \frac{1}{x-1}$

c) $h(x) = x^2$

d) $i(x) = \frac{2x}{x-3}$

e) $j(x) = \frac{1}{x}$

f) $k(x) = \sqrt{x^2+4}$

g) $l(x) = Lnx$

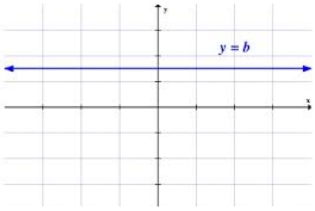
h) $m(x) = e^{x+1}$

5.3 CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES Y SUS TRANSFORMACIONES.

Uno de nuestros objetivos en aprender a dibujar gráficas, para ello debemos aprender conceptos matemáticos complejos. Para ayudarnos a aprender estos conceptos necesitamos las gráficas de funciones sencillas, funciones elementales. Algunas de ellas ya las conocemos y otras no, en el siguiente cuadro (imprime o copia y añádelo a los resúmenes) están las funciones elementales que debemos conocer y cómo se deben representar. En clase resaltaremos los puntos importantes de aquellas funciones que no conocemos o conocemos menos.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES ELEMENTALES

Recta horizontal

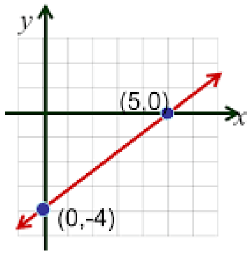


$f(x) = b$ es constante

Recta creciente

$f(x) = mx + n \quad m > 0$

$$y = \frac{4}{5}x - 4$$

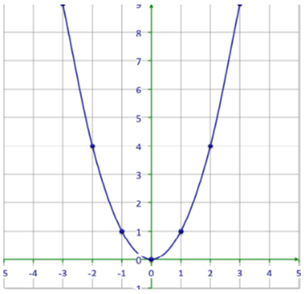


Calculamos los puntos de corte y representamos

Si m<0, la recta será decreciente

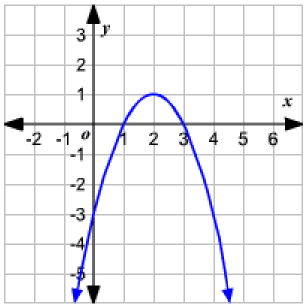
Parábola

$f(x) = x^2$



Parábola

$f(x) = ax^2 + bx + c$



$y = -x^2 + 4x - 3$

a) $x=0 \rightarrow y = -0^2+4\cdot 0-3=-3$

b) $y = 0 \rightarrow x = \ldots = 1, 3$

c) $Vx = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow$

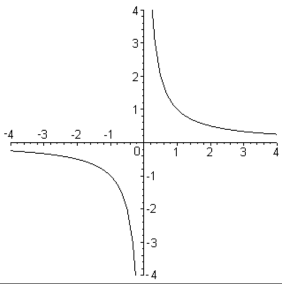
$y = -2^2 + 4\cdot 2 - 3 = 1 \rightarrow$

Vértice (2,1)

Si a > 0 la parábola es de la forma U

Proporcionalidad inversa

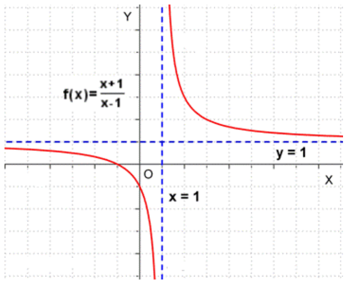
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Observa que tiene una asíntota horizontal y = 0 y una a vertical x = 0

Función racional (numerador y denominador de grado 1)

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$



a) A vertical cx + d = 0

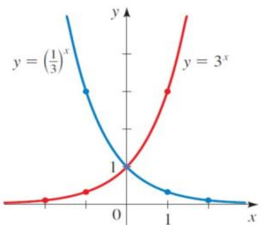
$\rightarrow x = \frac{-d}{c}$

b) Asíntota horizontal en $y = \frac{a}{c}$

c) un punto

Función exponencial

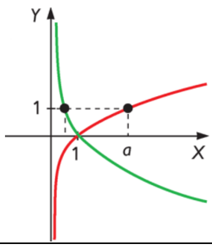
$f(x) = a^x$



Observa que tiene una asíntota horizontal en y = 0 y siempre corta en (0,1)

Función logarítmica

$f(x) = \log_a x$



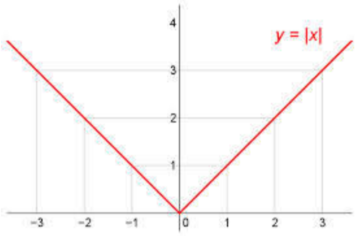
Observa que tiene una asíntota vertical en x = 0 y siempre corta en (1, 0)

La gráfica roja es cuando a > 1

La gráfica verde es cuando a < 1

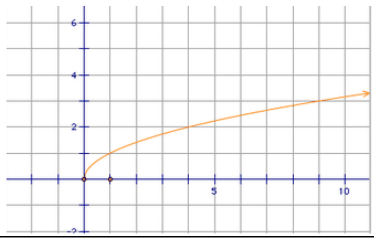
Función valor absoluto

$f(x) = |x|$



Función radical de x

$f(x) = \sqrt{x}$



Dada la función $y = x^2$ ¿puedes saber cómo es la gráfica de $y = 2x^2$? ¿Y de $y = 4x^2$? ¿Y de $y = -x^2$? ¿Y de $y = x^2 + 1$? ¿Y de $y = (x+1)^2$? A esto llamamos transformaciones de una función. A partir de representaciones sencillas, podemos obtener otro tipo de funciones que son transformaciones de la primera. Para ello debemos de tener en cuenta los distintos tipos de transformaciones:

a) Dilatación $y = a\cdot f(x)$ → si $a > 1$ la gráfica se estrecha.
b) Dilatación $y = a\cdot f(x)$ → si $a < 1$ la gráfica se ensancha.
c) Traslación vertical $y = f(x) + a$ con $a > 0$, la gráfica sube "a" unidades.
d) Traslación vertical $y = f(x) - a$ con $a > 0$, la gráfica baja "a" unidades.
e) Traslación horizontal $y = f(x + a)$ con $a > 0$, la gráfica se traslada "a" unidades a la izquierda.
f) Traslación horizontal $y = f(x - a)$ con $a > 0$, la gráfica se traslada "a" unidades a la derecha.

Ejercicio 8: Representa las siguientes funciones como transformaciones de una función elemental:

a) $y = 5x^2$ b) $y = x^2 - 3$ c) $y = 2x^2 + 1$
d) $y = \frac{-1}{x}$ e) $y = \frac{1}{x+2}$ f) $y = \frac{1}{x} + 2$
g) $y = 3 + \sqrt{x}$ h) $y = \sqrt{x+1}$ i) $y = -\sqrt{x}$
j) $y = 3 + \sqrt{x-4}$ k) $y = \sqrt{2-x}$ l) $y = -\sqrt{4-x}$

Ejercicio 9: Representa las siguientes funciones racionales cuyo numerador y denominador son polinomios de grado 1:

a) $y = \frac{3x+2}{x+2}$ b) $y = \frac{4x+3}{x-3}$ c) $y = \frac{x+1}{x-1}$ d) $y = \frac{x-1}{x}$

Ejercicio 10: Representa las siguientes funciones a trozos:

a) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} Lnx & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ e) $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Ejercicio 11: Representa las siguientes funciones con valor absoluto:

a) $y = |x^2 - 5x + 4|$ b) $y = |2x - 4|\ \ x \in [-1,5]$ c) $y = |-x^2 + 4x + 5|$
d) $y = |x - 3|$ e) $y = 2 - |x - 3|$ h) $y = 1 - |x^2 - 4|$

5.5 INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN.

En ocasiones un fenómeno económico, médico, biólogo, etc es conocido por algunos valores y tratamos de calcular una función matemática que se ajuste a dichos valores. A dicho proceso se le llama interpolar, **interpolar** es calcular el valor aproximado de una función para un valor dado de la variable independiente cuando este se encuentra en el intervalo de valores tabulados (conocidos). Cuando el valor de la variable independiente está fuera de valores tabulados, al proceso se le llama **extrapolar**. Nosotros estudiaremos la interpolación lineal y cuadrática.

Comencemos con la **interpolación lineal**, es decir, cuando los datos de un problema se corresponden con una recta. Calcular la ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos $A(x_0,y_0)$ y $B(x_1,y_1)$ tiene un proceso mediante fórmulas donde $y = m(x - x_0) + y_0$ siendo $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Aunque en el siguiente problema lo haremos de forma más razonada y sin fórmulas:

Ejercicio 12: Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos A = (2,1) y B = (4,-1).

Ejercicio 13: Resuelto: Por un recibo de gas en el que se han consumido 10 m^3 se han pagado 50 € y por 16 m^3 se han pagado 71 €. ¿Cuánto habrá que pagar por un consumo de gas de 15 m^3? ¿Y por 8 m^3?

En primer lugar identificamos la variable independiente, en este ejercicio "x" es la cantidad de m^3 que hemos consumido. De la cantidad que consumimos depende el coste, por tanto "y" es el coste en €.

En segundo lugar, calculamos la recta que pasa por (10, 50) y (16, 71). Para ello tendremos en cuenta que las funciones lineales (rectas) son de la forma f(x) = mx + n

$$\left.\begin{array}{l}(10,\ 50) \rightarrow 50 = m\,10 + n \rightarrow 10\,m + n = 50 \\ (16,\ 71) \rightarrow 71 = m\,16 + n \rightarrow 16\,m + n = 71\end{array}\right\}\ \text{resolvemos el sistema obteniendo } m = 7/2 \text{ y } n = 15$$

Es decir, f(x) = $\frac{7}{2}x + 15$, por tanto para saber cuánto costaran 15 m^3, sustituimos en la función, f(15) = $\frac{7}{2}15 + 15 = \frac{135}{2}$. Es Interpolación ya que 15 está dentro el intervalo (10, 15).

Para saber cuánto costaran 8 m^3, sustituimos en la función, f(8) = $\frac{7}{2}8 + 15 = 43$. Por tanto 8 m^3 costarán 43 €. Es extrapolación ya que 8 está fuera del intervalo (10, 15).

Ejercicio 14: El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de la velocidad a la que va. A 60 km/h consume 5,7 l, a 80 km/h consume 6,7 l y a 90 km/h consume 7,2 l. Estima cuánto consumirá si recorre 100 km a 70km/h. ¿Y a 100 km/h?

Si queremos interpolar un valor intermedio a partir de tres datos no alineados, buscaremos una función polinómica de segundo grado, a este proceso se le llama **interpolación cuadrática**.

Ejercicio 15: Los precios de ciertas parcelas cuadradas varían en función de la longitud de su lado, una parcela de 5 m cuesta 35 mil euros (en la función pondremos 35), de 10 m cuesta 100 mil euros, de 20 m cuesta 380 mil euros. ¿Cuánto valdrá un terreno de 15 m de lado?

En primer lugar identificamos la variable independiente, en este ejercicio "x" es la cantidad de metros que mide el lado de la parcela. El coste de la parcela depende de los metros del lado, por tanto "y" es el coste en miles de €.

En segundo lugar, representamos los puntos para comprobar que se trata de una curva, por tanto se trata de interpolación cuadrática, es una parábola que es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, para ello necesitamos tres datos: (5, 35), (10, 100) y (20, 380).

$$\left.\begin{array}{lll} (5,\ 35) \rightarrow & 35 = a5^2 + b5 + c \rightarrow & 25a + 5b + c = 35 \\ (10,\ 100) \rightarrow & 100 = a10^2 + b10 + c \rightarrow & 100a + 10b + c = 100 \\ (20,\ 380) \rightarrow & 380 = a20^2 + b20 + c \rightarrow & 400a + 20b + c = 380 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema eliminando c, para ello utiliza reducción para eliminar c con la 1ª y la 2ª y con la 1ª y la 3ª, obteniendo $a = 1$, $b = -2$ y $c = 20$.

Es decir, $f(x) = x^2 - 2x + 20$, por tanto para saber cuánto costará una parcela de 12 m de lado, sustituimos en la función, $f(12) = 12^2 - 2\ 12 + 20$, $f(12) = 140$ €. Es Interpolación ya que 12 está dentro el intervalo (5, 20).

**Nota: A partir de ahora los problemas tendrán tres datos, pero ello no significa que sea interpolación cuadrática, para decidir si se trata de interpolación cuadrática o lineal, representamos los puntos en los ejes de coordenadas y observamos la gráfica, si la gráfica forman una recta será interpolación lineal, si la gráfica es una curva será interpolación cuadrática.

Ejercicio 16: Una gran superficie comercial vendió en enero 8 millones de euros, en febrero 7 millones y en marzo 5 millones. Encuentra la función cuadrática que se ajusta a estos tres datos. ¿Qué ventas se esperan en abril?

Ejercicio 17: Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla:

Año	2013	2014	2015
Gasto en publicidad (miles)	1	3	5
Ingresos (en miles)	4	26	64

a) Observa las variaciones que se producen en los gastos y en los ingresos, y decide qué tipo de interpolación es la más conveniente para reflejar la situación.
b) Calcula, mediante interpolación, qué ingresos se esperan si solo podemos gastar 4.500 € en publicidad.
c) Utiliza la función hallada en el apartado anterior para estimar que gastos en publicidad sería necesario hacer para ingresar 50.000 €.

Ejercicio 18: Una madre anota cada año el peso de su hijo, que acaba de cumplir 9 años. Con esos datos se tiene la siguiente tabla:

Nº años	1	3	5	6	9	10
kilogramos	10	14		20	26	

Como puedes ver, en la tabla faltan algunos datos.

a) Representa en un diagrama los datos de la tabla.
b) ¿Es interpolación lineal o cuadrática? ¿por qué?
c) ¿Qué peso tenía a los 5 años?
d) ¿Qué peso se supone que tendrá a los 10 años?
e) ¿Cuál de los dos pesos está relacionado con la extrapolación?

Ejercicio 19: Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio que está a 80 m de altura. Después de un segundo la pelota está a 128 m y después de dos segundos 144 m.

a) Representa los datos en una tabla.
b) Representa en un diagrama los datos.
c) ¿Es interpolación lineal o cuadrática? ¿por qué?
d) ¿Qué altura tendrá a los 3 segundos? ¿se trata de interpolación o extrapolación? ¿Por qué?
e) ¿Cuándo llegará al suelo?