TEMA 6: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS.

6.1 Concepto de límite lateral. Límite de una función en un punto.
6.2 Cálculo de límites en un punto.
6.3 Continuidad de una función.
6.4 Cálculo de límites cuando x->∞.
6.5 Asíntotas: Verticales, horizontales y oblicuas.

6.1 Concepto de límite lateral. Límite de una función en un punto.

Mira el vídeo para comprender el concepto de límite, en el vídeo trabajaremos con las funciones:

$f(x) = x^2 - 4$ $\qquad$ $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x>1 \\ x^2-4 & \text{si } x\le 1 \end{cases}$

Calcula f(1) y g(1), ¿qué observas en los dibujos?
Calcula f(2) y g(2), ¿qué observas en los dibujos?

Debes copiar las siguientes definiciones, en clase las repasaremos.

Se dice que un número real L es el **límite de una función en el punto a por la derecha**, si al tomar valores de x cada vez más próximos a "a", con x > a, sus imágenes correspondientes, f(x), están más próximos a L. Y se escribe $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Análogamente se dice que un número real L es el **límite de una función en el punto a por la izquierda**, si al tomar valores de x cada vez más próximos a "a", con x < a, sus imágenes correspondientes, f(x), están más próximos a L. Y se denota por $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Una función f tiene por **límite L cuando x tiende a "a"** si se verifican las tres condiciones siguientes, existe el límite por la derecha de f en x=a, existe el límite por la izquierda de f en x=a y ambos límites coinciden y valen L. Y se denota por $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Si existe, el límite es <u>único</u>.

6.2 Cálculo del límite de una función en un punto.

Si existen los limites de f y g en x = a y $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ entonces podemos afirmar que:

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L + M$
2. $\lim_{x\to a}(kf(x)) = k \cdot L$
3. $\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = L \cdot M$
4. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$
5. $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ con $L > 0$
6. $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L^M$ con $L > 0$

Ejercicio 1: Calcula los siguientes límites de funciones en el punto indicado:

a) $\lim_{x\to 0}(x^3 - x^2 + 1) =$

b) $\lim_{x\to 2} 4 =$

c) $\lim_{x\to 1}(x-3) =$

d) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3+1}{x} =$

e) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1} =$

f) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x} =$

g) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-5x+3}}{2x-1} =$

h) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5x+3}{-x+1}\right)^x =$

i) $\lim_{x\to 3}(x^2+1) =$

j) $\lim_{x\to 1} e^{x+1} =$

k) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} =$

l) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} =$

m) $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{2-x} =$

n) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} =$

ñ) $\lim_{x\to 1}\frac{-x}{(x^2-1)^2} =$

o) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} =$

p) $\lim_{x\to 2^-}\frac{3-x}{x-2} =$

q) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x-4}{x^2-2x+1} =$

r) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2} =$

s) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1} =$

t) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3x^2}\right) =$

u) $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x^2+x-6} =$

v) $\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-x}{x^2-2x} =$

w) $\lim_{x\to 1}\frac{-x^3+1}{(x-1)^2} =$

x) $\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} =$

y) $\lim_{x\to 1}\frac{2-x}{\sqrt{-x+2}-2} =$

z) $\lim_{x\to 3} 2^x =$

aa) $\lim_{x\to 4}\log_2 x =$

bb) $\lim_{x\to 3} e^x =$

cc) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{2x+1}+3} =$

dd) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x}{x-2} =$

ee) $\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{x^2-x-2} =$

ff) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad x \to -1, x \to 0, x \to 2, x \to 1$

gg) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad x \to -1, x \to 0, x \to 2, x \to 1$

6.3 Continuidad de una función.

Una función f es **continua en un punto x = a** si existe el límite de f cuando x tiende a "a", existe la imagen de a mediante f y ambos coinciden, es decir, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Las funciones elementales (que vimos en la unidad anterior) son continuas en su dominio (observa sus gráficas). Además si f y g son continuas entonces podemos afirmar que f+g, f-g, kf, f.g y f/g (con g(a) distinto de 0) son continuas. Esto nos va a ser muy útil en los siguientes ejercicios.

Si una función no es continua en x = a se dice que es **discontinua**. Hay tres tipos de discontinuidades:

1. La función f tiene una discontinuidad de **tipo evitable** en x = a si $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ o $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ pero no existe f(a)

2. La función f tiene una discontinuidad **inevitable de salto finito** en x = a si existen los límites laterales pero $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$.

3. La función f tiene una discontinuidad **inevitable de salto infinito** en x = a si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ y/o $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$.

Ejercicio 2: Estudia la continuidad de la función f en el punto o puntos indicados:

a) $f(x) = e^{x+3}$ en x = 5

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ en $x = 2$ y en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2, x = -2$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2, x = 0$

Ejercicio 3: Estudia la continuidad de las siguientes funciones, para ello debes dar los siguientes pasos:

1) Estudiar el dominio

2) Estudiar la continuidad en los puntos problemáticos: los que no están en el dominio y en los extremos de los intervalos de definición (frontera) si se trata de una función a trozos.

3) Decir en qué conjunto la función es continua, es decir, del dominio debemos quitar los puntos donde no es continua.

a) $f(x)=x^2+1$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x<2 \\ x-2 & \text{si } 2\leq x\leq 4 \\ 5 & \text{si } x>4 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$

Ejercicio 4: Calcula el valor del parámetro a sabiendo que la función f es continua en $\Re$, siendo $f(x)=\begin{cases} 2+ax & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

Ejercicio 5: Calcula el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f es continua en $\Re$ y que f pasa por el punto (0, 2), siendo $f(x)=\begin{cases} a+bx & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{2x-2}{x^2-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$.

6.4 Cálculo de límites cuando x->∞.

En algunas gráficas hemos visto las rectas horizontales y verticales (líneas discontinuas) a las que le hemos llamado asíntotas. Las asíntotas verticales las hemos visto al estudiar la continuidad, cuando las discontinuidades son de salto infinito obtenemos una asíntota vertical. Las asíntotas horizontales representan lo que ocurre cuando x es muy grande, para ello debemos primero aprender límites de funciones en el infinito. No olvides que límite es una tendencia, hacia dónde va y cuando la x se "mueve".

Para calcular límites en el infinito tenemos que pensar en x como un número muy grande. Al calcular el límite es muy importante aclarar el signo siempre que sea posible. Veamos algunos ejemplos:

$\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ No olvides ∞ que es un número enorme, si te ayuda piensa en 1.000.000.000.000.000.000

$\lim_{x\to-\infty} x^2=(-\infty)^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (x+5)=+\infty+5=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2-5) = (-\infty)^3+(-\infty)^2-5 = -\infty+\infty-5 = -\infty$ ** El segundo ∞ es más "pequeño" que el primero, el primero está elevado al cubo y el segundo al cuadrado.

$\lim_{x\to+\infty}(-4x+5) = -4(+\infty)+5 = -\infty+5 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x-1} = \frac{-3}{+\infty} = 0$ Imagina, divide $\frac{1}{1.000.000.000.000.000} = 0{,}000000000000001$ es decir, tiende a "0"

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{-1} = -\infty$

Ejercicio 6: Calcula los siguientes límites de funciones cuando x → ∞, recuerda que en cada apartado tienes que hacer dos límites uno para + ∞ y otro para - ∞:

a) $f(x) = -x^2+3x+1$

b) $f(x) = 5x^3+7x$

c) $f(x) = x-3x^4$

d) $f(x) = \frac{2x+3}{5}$

e) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{2x+3}$

g) $f(x) = \sqrt{x^4-x}$

h) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

j) $f(x) = \frac{1}{3x}$

k) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{x^3-1}{-5}$

¿Cuánto crees que vale $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$? Este es otro de los límites complicados, $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ = Ind. Para resolver los límites del ejercicio 7 necesitas la **regla de los grados**: Si $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ = Ind entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si grado } P(m) < \text{grado } Q(n) \\ \frac{a}{b} & \text{si grado } P(m) = \text{grado } Q(n) \\ \pm\infty & \text{si grado } P(m) > \text{grado } Q(n) \end{cases}$$

Siendo a y b los coeficientes principales de P y Q, respectivamente.

Ejercicio 7: Calcula los siguientes límites de funciones cuando x → ∞:

a) $f(x) = \frac{4x+3}{3x-2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{2x^3-x}{x^3-4}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{3x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^5+x^3}$

e) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^4}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$

g) $f(x) = \frac{2x^5-1}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-5}$

i) $f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$ j) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{(2x-1)(x+5)}$ k) $f(x)=\frac{x^2-1}{(2x-5)^2}$

Cuando tenemos una indeterminada pero en el numerador y/o denominador aparece una raíz, podemos aplicar la regla de los grados pero debemos tener más cuidado. A continuación te dejo varios ejemplos resueltos:

1) Resaltar que el grado se calcula teniendo en cuenta el índice de la raíz y el exponente de x, ejemplos: $\sqrt{x+3}=\sqrt[2]{x^1+3}$ → grado $\frac{1}{2}$, $\sqrt[4]{x^2+x-5}$ → grado $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{x-x^5}$ → grado $\frac{5}{3}$.

2) No olvides distinguir al + ∞ y al - ∞ → $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}=\text{no existe}\end{cases}$

   Al + ∞ vale "0" porque el grado del numerador es ½ y del denominador es 1, por tanto grado P < grado Q.
   En cambio cuando va a - ∞ no existe porque no existe la raíz de índice par de un número negativo.

3) Cuando el grado del numerador y del denominador son iguales, el valor del límite es el cociente de los coeficientes principales. Debes tener en cuenta los siguientes ejemplos: En $\sqrt{4x+3}$ el coeficiente principal es $\sqrt{4}$, es decir, 2, en $\sqrt{3x+3}$ el coeficiente principal es $\sqrt{3}$, en $\sqrt[3]{x+5}$ el coeficiente principal es $\sqrt[3]{1}$, es decir, es 1.
   $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2}}{2x-1}=$ Como el grado del numerador es 1 y el grado del denominador es 1, tienen el mismo grado, por la regla de los grados, el valor del límites es el cociente de los coeficientes principales $=\frac{\sqrt[3]{8}}{2}=\frac{2}{2}$ = 1, aunque no lo muestre, antes de empezar he mirado que tiene sentido el límite al + ∞ y al - ∞.

4) Tenemos que tener en cuenta si podemos calcular el límite al + ∞ y al - ∞, tener cuidado al calcular los grados, cuidado al calcular los coeficientes, pero aún nos queda un problema más, el resultado final puede tener doble signo. Por ejemplo:
   $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x-1}=$ primero vemos que tiene sentido tanto a + ∞ como a - ∞, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x-1}=\frac{\sqrt{9(+\infty)^2+3}}{2(+\infty)-1}=\frac{\sqrt{(+\infty)}}{(\pm\infty)}=\frac{(+\infty)}{(\pm\infty)}$, es una indeterminada y como el grado del numerador es 2/2 = 1 y el grado del denominador es 1, es decir, son del mismo grado, por la regla de los grados, dicho límite es el cociente entre los coeficientes principales, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x-1}=\frac{\sqrt{9}}{2}=\frac{3}{2}$. No es correcto, ya que el numerador es positivo (raíz positiva de número positivo) pero el denominador es negativo cuando vamos a - ∞, por tanto se nos ha escapado que teníamos que distinguir al + ∞ y al - ∞:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3}}{2x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{2x-1}=\dfrac{\sqrt{9}}{2}=\dfrac{3}{2}\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{2x-1}=\dfrac{\sqrt{9}}{-2}=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Ejercicio 8: Calcula los siguientes límites de funciones cuando x → ∞, recuerda que en cada apartado tienes que hacer dos límites uno para + ∞ y otro para - ∞:

a) f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}$ b) f(x) = $\dfrac{\sqrt[3]{x^5-2}}{x+3}$ c) f(x) = $\dfrac{3-x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

d) f(x) = $\dfrac{x^3-3x^5}{2+x^3}$ e) f(x) = $\dfrac{2x^2-3x^3}{4x^3}$ f) f(x) = $\dfrac{4}{x^2-5}$

g) f(x) = $\dfrac{\sqrt{x+3}}{1-x^2}$ h) f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{x^5-x}}$ i) f(x) = $\dfrac{\sqrt{4x^6+3x}}{1-x^3}$

Ejemplo resuelto que te ayudará en los dos últimos apartados del ejercicio 9:

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x>0\\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x\le 0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{-\infty}=0\end{cases}$$

Ejercicio 9: Calcula los siguientes límites de funciones cuando x → ∞, recuerda que en cada apartado tienes que hacer dos límites uno para + ∞ y otro para - ∞, puedes ayudarte de las gráficas de las funciones elementales:

a) f(x) = e^x b) f(x) = $\text{Ln } x$ c) f(x) = e^{-x}

d) f(x) = $\text{Ln } x^2$ e) f(x) = $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ f) f(x) = $\begin{cases}\dfrac{x+1}{3-x} & \text{si } x<1\\[2ex] x^2-3 & \text{si } \ge 1\end{cases}$

g) f(x) = $\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\[2ex] x-3 & \text{si } \ge 0\end{cases}$

8.5 Asíntotas.

Aunque aún no hemos definido lo que es una asíntota, hemos ido hablando de ellas. Los límites nos ayudan a representar la gráfica de una función a través de las asíntotas.

ASÍNTOTA VERTICAL: Si en un punto x = a la función f tiene uno o ambos límites laterales infinito se dice que f tiene una **asíntota vertical** en x = a, es decir, si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ entonces x = a es una asíntota vertical. Por tanto, podemos tener asíntotas verticales en los puntos en los que se divide por 0 ó tenemos logaritmo de cero.

ASÍNTOTA HORIZONTAL: Si el límite cuando x tiende a $\pm\infty$ de f es k, con k un número real, se dice que f tiene una **asíntota horizontal** en y = k, es decir, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ entonces y = k es una asíntota horizontal. Revisa el resumen de las funciones elementales y localiza aquellas que tienen asíntota horizontal.

Ejercicio

Ejemplo: Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x-6}{x^2-9}$, debes realizar los siguientes pasos:

1) Calcular el dominio de f, Domf = $\Re - \{-3,3\}$
2) Estudiar el límite en x = 3 y en x = - 3
   a. En x = 3, $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \left(\frac{0}{0} = \text{Ind}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{5}$ por tanto no hay asíntota vertical, para que sea a. vertical el límite tiene que ser infinito.
   b. En x = - 3, $\lim_{x\to -3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{-12}{0} = \pm\infty$ por tanto f tiene una a. vertical en **x = -3**.
3) En resumen, hay una asíntota vertical en x = - 3
4) Vamos a justificar si tiene o no asíntota horizontal, para ello debemos calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{x^2-9}$, usando la regla de los grados → $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{x^2-9} = \left(\frac{\infty}{\infty} = \text{Ind}\right) = 0$ (es un número) por tanto f tiene una asíntota horizontal en **y = 0**.

Ejercicio 10: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{1-2x}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

d) $f(x) = e^{x+3}$

e) f(x) = Ln (x-1)

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x > -1 \\ 2x-1 & \text{si } x \le -1 \end{cases}$

Tres ejemplos de asíntotas horizontales resueltos que te ayudaran:

a) Estudia la asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{2x-6}{x^2-9}$: Para ello debes calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-6}{x^2-9}$, según su valor tendrá o no AH → $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-6}{x^2-9}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}=\text{Ind}\right)=0$ por la regla de los grados, como el límite vale "0" afirmamos que f tiene una asíntota horizontal en **y = 0.**

b) Estudia la asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{2x-6}{x-9}$: calculamos $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-6}{x-9}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}=\text{Ind}\right)=2$ por la regla de los grados, por tanto f tiene una asíntota horizontal en **y = 2.**

c) Estudia la asíntota horizontal de $f(x)=\dfrac{2x^3-6}{x-9}$: calculamos $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-6}{x-9}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}=\text{Ind}\right)=\pm\infty$ por la regla de los grados, por tanto f no tiene una asíntota horizontal.

Ejercicio 11: Las conclusiones de un estudio demográfico establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, en los próximos años, por la siguiente función: $f(t) = \dfrac{15000t+10000}{2t+2}$ siendo t el número de años transcurridos. ¿Cuál es el tamaño actual de la población? Si esta función fuera siempre válida, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Os pregunta por la tendencia cuando t se hace muy grande, es decir, el límite en el infinito

Ejercicio 12: Se ha investigado el tiempo T, en minutos, que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento x, en días, obteniéndose:

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0\le x\le 30\\[2ex] \dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2 & \text{si } x>30\end{cases}$$

Demuestra que la función es continua. ¿Se puede afirmar que cuánto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba?

Ejercicio 13: En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento y sigue la siguiente función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$, siendo t el número de días de entrenamiento. ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo? ¿Qué ocurriría si el número de días de entrenamiento aumentara constantemente?

Ejemplo resuelto para preparar el ejercicio 14, este ejemplo es muy completo, normalmente tendremos menos apartados:

Dada la función f(x) = $\dfrac{x^3-4x}{x^2+3x+2}$, estudia su continuidad y asíntotas.

1) Lo primero es el cálculo del dominio, $x^2+3x+2=0,..,x=-2,-1 \rightarrow Domf = \Re - \{-2,-1\}$.
2) Estudiamos lo que ocurre en x = - 2 y en x = - 1
   a. En x = -2, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}=Ind\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x-2)}{x+1}=-8$ nos da doble información, como hay límite el tipo de discontinuidad es evitable y además nos dice que no hay asíntota vertical.
   b. En x = -1, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x}{x^2+3x+2}=\dfrac{3}{0}=\pm\infty$ nos dice que hay a. vertical en x = -1.
3) **Continuidad de f**, f es continua en $\Re-\{-2,-1\}$, en x = - 2 hay una discontinuidad evitable (lo hemos visto en el punto 2 a) y en x = -1 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito (lo hemos visto en el punto 2 b).
4) **Asíntotas verticales**, al estudiar la continuidad ya hemos hecho el estudio de las asíntotas verticales, del apartado 2 sabemos que: Hay una asíntota vertical en x = -1.
5) **Asíntota horizontal**, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x}{x^2+3x+2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}=Ind=RG\right)=\pm\infty$ por tanto no hay a horizontal, por ello estudiaremos si hay a oblicua.
6) **Asíntota oblicua**, tiene porque el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, por tanto realizamos $(x^3 - 4x) : (x^2 + 3x + 2)$ obteniendo que f tiene una asíntota oblicua en y = x - 3

Ejercicio 14: Estudia la continuidad y asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x-2}{x-4}$

b) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2+4}$

e) $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si\ x\geq 1\end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ x\leq -1 \\ \dfrac{2-x}{x+1} & si\ x> -1\end{cases}$

Ejercicio 15: Sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)= 3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)= -\infty$, calcula si es posible:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=$
2. $\lim\limits_{x\to a}(3f(x))=$
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$
5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=$
6. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=$