TEMA 10: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. LA BINOMIAL.

10.1 Experimentos aleatorios. Sucesos.

Si al repetir un experimento en las mismas condiciones conduce siempre al mismo resultado, **experimento determinista**. Ejemplo, velocidad de un objeto al caer desde una altura de 2 m. Pero si los resultados no se pueden predecir, se llaman **experimentos aleatorios**. Ejemplo, al lanzar un dado. Para estudiar un experimento aleatorio necesitamos definir los distintos elementos:

Espacio muestral es el conjunto formado por los resultados posibles del experimento, E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. **Suceso** es un subconjunto del espacio muestral, {1, 2}. **Suceso elemental** es aquel que contiene un único resultado posible, {4}. **Suceso compuesto** es aquel que contiene más de un resultado posible, {4, 5, 6}. **Suceso imposible** es aquel suceso que nunca ocurre. Se denota por ϕ. **Suceso seguro** es aquel que ocurre siempre, coincide con el espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Dado un suceso A, se llama **suceso contrario** o **complementario de A** al suceso que ocurre cuando no ocurre A. Se denota por $\overline{A}$. Si A = {1, 3} entonces $\overline{A}$ = {2, 4, 5, 6}

Para construir el espacio muestral es conveniente realizar un diagrama de árbol:

a) Familias con tres hijos de distintas edades.
b) Elegimos una ficha del dominó.
c) Elegimos una carta de una baraja de 40 cartas.

Ejercicio 1: "Al lanzar un dado". Operaciones con sucesos:

a) A = {sale un par}, B = {sale un menor que 3}. $A \cup B$ =
b) A = {sale un par}, B = {sale un menor que 3}. $A \cap B$ =
c) A = {sale un par}, B = {sale un menor que 3}. A-B =
d) Dos sucesos son **incompatibles** cuando no pueden ocurrir a la vez, por ello $A \cap B = \phi$. Por ejemplo el suceso contrario de A = {ser par} es B =

10.2 Frecuencias relativas y probabilidad. Definición axiomática.

Se llama **frecuencia absoluta** del suceso A, f(A), al número de veces que ocurre A. Se llama **frecuencia relativa** del suceso A al cociente entre el número de veces que ocurre A y el número total de repeticiones del experimento, $h(A) = \dfrac{f(A)}{n} = \dfrac{\text{n veces que ocurre A}}{\text{n de observaciones realizadas}}$.

Se llama **probabilidad de un suceso A** al límite de h(A) cuando el número de observaciones tiende a infinito, $P(A)= \lim_{n \to +\infty} h(A)$.

Es imposible realizar infinitos experimentos, por ello es necesario una nueva definición de probabilidad que verifica la **axiomática de Kolmogorov** (Matemático ruso, 1903-1987), pasando de una probabilidad de un experimento determinista a una probabilidad de un experimento aleatorio.

Llamamos **probabilidad** a cualquier función P que a cada suceso A, asociado a un experimento aleatorio, cuyo espacio muestral es E, le asigna un número real P(A), que cumpla las siguientes propiedades (axiomas):

1) $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso A.
2) P(E) = 1.
3) $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$, siendo los sucesos A_1, A_2, ..,A_k sucesos incompatibles dos a dos.

Observaciones:

1) La probabilidad de un suceso imposible es 0.
2) Dado un suceso A y su suceso contrario, se tiene $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3) Si un suceso A está contenido en otro suceso B entonces $P(A) \leq P(B)$
4) Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$
5) Dados dos sucesos A y B se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) Dados dos sucesos A y B se tiene que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Si en un suceso A del espacio E, finito equiprobable, contiene m de los n resultados posibles del experimento, su **probabilidad** se puede calcular mediante la regla de Laplace:

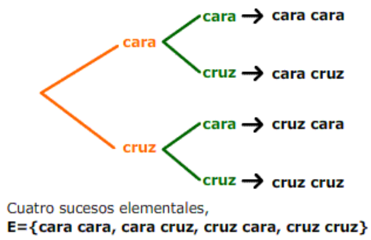
$$P(A) = \frac{\text{n de sucesos elementales de que consta A}}{\text{n total de sucesos elementales}}$$

Ejercicio 2: Tiramos una moneda:

a) Calcula el espacio muestral. E = {X, C}
b) Di un suceso elemental.
c) Di el suceso contrario de "obtener cara".
d) P(sacar cara), P(sacar cruz)

Ejercicio 3: Tiramos dos monedas (o una moneda dos veces):

a) Calcula el espacio muestral. Usar diagrama de árbol.



b) Di un suceso elemental.

c) Di el suceso contrario de “obtener dos caras”.
d) Calcula las siguientes probabilidades: P(obtener una sola cara), P(obtener dos cruces), P(obtener ninguna cara).

Ejercicio 4: Tiramos un dado:

a) Calcula el espacio muestral. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
b) Di un suceso elemental.
c) Di el suceso contrario de “obtener par”.
d) Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: P(obtener un dos), P(obtener un seis), P(obtener un n par), P(obtener un múltiplo de tres), P(obtener un nº menor que 5), P(obtener un n impar).

Ejercicio 5: Tiramos dos dados (o un dado dos veces):

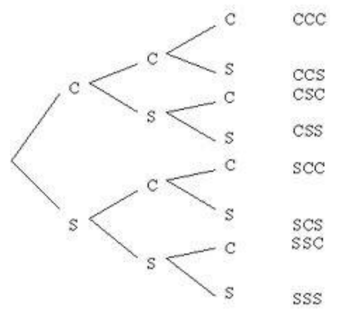
a) Calcula el espacio muestral. Para hacer el espacio muestral y contar es mejor hacer una tabla de 7x7.
b) Di un suceso elemental.
c) Di el suceso contrario de “Obtener un múltiplo de 3”.
d) Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

P(obtener un dos), P(obtener un seis), P(obtener un n par), P(obtener un múltiplo de tres), P(obtener un nº menor que 5), P(obtener un n impar).

e) ¿Cuál debería ser nuestra apuesta “obtener un a” para tener mayor probabilidad de ganar?

Ejercicio 6: Tiramos dos dados especiales. El dado tiene dos caras con 1, tres caras con 2 y una cara con 3. Te ofrecen una apuesta a elegir entre: “obtener un dos”, “obtener un tres”, “obtener un número par”, “obtener un múltiplo de tres”, “obtener un número menor que 3” y “obtener un número impar”. ¿A cuál de estos sucesos apostarías?

Ejercicio 7: Tiramos tres monedas. Te ofrecen una apuesta a elegir entre: “obtener exactamente dos caras”, “obtener al menos dos caras” y “no obtener ninguna cruz”. ¿A cuál de estos sucesos apostarías?



Ejercicio 8: Sacamos una carta de la baraja.

a) Calcula el espacio muestral.
b) Di un suceso elemental.
c) Di el suceso contrario de “sacar copas”.
d) Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: P(obtener un oros), P(obtener un seis), P(obtener una figura), P(obtener un as).

"Sacar dos cartas de una baraja" es "sacar un carta" y "sacar otra", pero es importante distinguir las dos modalidades posibles:

a. Extracciones **con reemplazamiento**, como se indica después de cada extracción reponemos el elemento extraído. De este modo cada extracción se realiza en las mismas condiciones.
b. Extracciones **sin reemplazamiento**, como se indica después de cada extracción no reponemos el elemento extraído. Por tanto las condiciones de cada extracción son distintas dependiendo de los elementos extraídos.

Dos o más experiencias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada uno de ellas no depende del resultado de las demás. Por ejemplo: "Sacamos dos cartas con reemplazamiento"

P(Sacar un as de oros en la 1º y 3 de copas en la 2º) = **P(**sacar un as de oros) **x** **P(**sacar un 3 de copas) = 1/40 . 1/40

Dos o más experiencias son **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades siguientes. Por ejemplo: "Sacar dos cartas sin reemplazamiento".

P(Sacar dos ases) = **P(**sacar un as) **x** **P(**sacar un as /sabiendo que la primera es una as) = 4/40 . 3/39

Ejercicio 9: Sacamos dos cartas de una baraja de cartas. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Con reemplazamiento: P(obtener dos oros)
P(obtener primero un as y después una figura)
P(obtener dos figuras)

b) Sin reemplazamiento: P(obtener dos oros)
P(obtener primero un as y después una figura)
P(obtener dos figuras)

Ejercicio 10: Extraemos tres bolas de una urna (dos azules y 4 rojas). Calcula la probabilidad de que las tres sean rojas si las extracciones son:
a) Con reemplazamiento b) sin reemplazamiento

Ejercicio 11: En una bolsa hay 5 bolas, del mismo tamaño, numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar tres de ellas, las tres sean impares?
a) con reemplazamiento b) sin reemplazamiento:

10.3 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Se llama **variable aleatoria** X a cualquier función real definida sobre el espacio muestral de un experimento aleatorio. Por ejemplo, Al experimento "Lanzar dos monedas" se le asigna la variable aleatoria X = "Número de caras al lanzar dos monedas". La **distribución de probabilidad** o función de masa de probabilidad de la variable X es la función que a cada valor x_i de la variable aleatoria se le asigna su probabilidad. La variable aleatoria puede ser discreta (toma valores finitos o infinitos que podemos numerar, estos valores son números enteros, por tanto pueden ser negativos) o continua (si toma valores comprendidos en un intervalo de la recta real). En este curso comenzamos el estudio de variables aleatorias discretas que pueden corresponder, principalmente, a tres categorías: Distribución binomial (eventos independientes), Distribución de Poisson (eventos independientes) y Distribución hipergeométrica (eventos dependientes). Y para variable aleatoria continua tendremos la distribución normal o *gaussiana*. Además, se puede utilizar la *"distribución de Poisson como una aproximación de la distribución binomial"* cuando la muestra por estudiar es grande y la probabilidad de éxito es pequeña.

En resumen, una **distribución de probabilidad de variable discreta** es el resultado de asignar a cada valor de la variable (discreta) su probabilidad, es decir, a x_i le corresponde $P(x_i) = p_i$, donde p_i es un número comprendido entre 0 y 1 y la suma de todos ellos es 1 (recordar la columna de h_i en la tabla de frecuencias). Esta definición verifica la axiomática de Kolmogorov.

Ejercicio 12: Se lanza dos veces una moneda trucada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es el doble de la de obtener cruz y se considera la variable aleatoria X : "Número de caras obtenidas". Sus valores son $x_1 = X(CC) = 0$, $x_2 = X(CX) = 1$ y $x_3 = X(XX) = 2$

x_i	0	1	2
$p_i=P(x_i)$	1/9	4/9	4/9

Ejercicio 13: Calcula la tabla de la distribución de probabilidades de los siguientes ejemplos:

a) "Número obtenido" al lanzar un dado.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p_i=P(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

b) "Suma de los resultados" al lanzar dos dados.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i=P(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

c) "Número de caras" al lanzar dos monedas.

x_i	0	1	2
$p_i=P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	2/4	$\frac{1}{4}$

d) En una bolsa hay bolas numeradas: 9 con uno, 5 con un dos y 6 con un tres. Se extrae una bola al azar, distribución de probabilidad de "resultado obtenido"

x_i	1	2	3
$p_i=P(x_i)$	9/20	5/20	6/20

e) En una lotería con 1000 números se rifa un número que gana 5000 €. El anterior y el posterior ganan 1000 €. Todos los que terminan igual que el ganador se llevan 10 € y el resto nada. Calcula la distribución de probabilidad de "premio obtenido" por una persona que juegue un número:

x_i	5000	1000	10	0
$p_i=P(x_i)$	1/1000	2/1000	99/1000	898/1000

f) Lanzamos un dado hasta que sale 6, contar el número n de veces que se ha lanzado el dado:

x_i	1	2	3	4	....	n
$p_i=P(x_i)$	1/6	(5/6)1/6	$(5/6)^2$ .1/6	$(5/6)^3$ .1/6	....	$(5/6)^{n-1}$.1/6

De forma análoga a la estadística, en la distribución de probabilidad podemos calcular los parámetros **media** o **esperanza matemática** y la **desviación**. Aunque hay similitudes, también hay diferencias. En la probabilidad notaremos la media mediante el símbolo μ y su fórmula queda de la forma $\mu = E[X] = \sum p_i x_i$ y la desviación queda con el mismo símbolo σ y su fórmula es $\sigma = +\sqrt{Var(X)} = +\sqrt{\sum p_i x_i^2 - \mu^2}$, cuyas unidades son las mismas que la de la variable aleatoria. Se define **mediana** como el valor M que verifica $P[X \leq M] \geq 0{,}5$ y $P[X \geq M] \geq 0{,}5$. Y se define **coeficiente de variación** al siguiente valor $CV(X) = \frac{\sigma}{|\mu|}$, este nos indica la dispersión de la variable respecto al valor esperado y sirve para comparar diferentes distribuciones, puesto que no es adimensional.

Ejercicio 14: Calcula la media y desviación de los distintos apartados del ejercicio 13 y la mediana y coeficiente de variación de los apartados c y d.

Ejercicio 15: Dibuja el diagrama de barras correspondientes a los apartados c y e del ejercicio 13.

Ejercicio 16: El número medio de personas que acuden a un centro médico por la mañana es de 110, con una varianza de 144, Por la tarde la media es de 220 y la varianza de 625. Si las horas de atención médica, son las mismas por la mañana que por la tarde, calcula el número medio de pacientes y su varianza.

10.4 EXPERIMENTOS DE BERNOULLI.

Si en una experiencia aleatoria destacamos un suceso A y prestamos atención, exclusivamente, a si ocurre A o no ocurre A, se trata de una **experiencia dicotómica** (dos conceptos complementarios) o **experimento de Bernoulli**. Al suceso A se le denomina éxito, y a su probabilidad P(A) = p. La probabilidad de su contrario es $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Se dice que la v. aleatoria X tiene una **distribución de Bernouille de parámetro p,** Ber(p) con $0 \leq p \leq 1$, si X = 1 significa que si ocurre A, éxito y X = 0 significa que A no ha ocurrido, fracaso. La distribución de probabilidad se expresa de la siguiente forma:

$$P(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & \text{si } x = 0 \text{ ó } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{siendo } q = 1 - p.$$

En las distribuciones de Bernouille se verifica que $\mu = p$ y $\sigma^2 = pq$

Ejercicio 17: Completa la siguiente tabla de experiencias dicotómicas, con este ejercicio queremos aprender a distinguir cuando una variable aleatoria discreta es del tipo Bernouille:

Experimento	Suceso A	P(A)	Contrario	$P(\overline{A})$	μ	σ^2
Lanzar una moneda	Sacar cara					
Lanzar un dado	Sacar un 5					
Extraer una carta de baraja	Sacar figura					
Una máquina fabrica tornillos, de ellos el 2% son defectuosos	Extraer un tornillo defectuoso					

10.5 VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

Si repetimos una experiencia dicotómica n veces, nos preguntamos por el número de éxitos que serán los valores de la variable discreta que varía de 0, 1, 2, ... , n. La distribución de probabilidad de la variable X se llama **distribución binomial** B(n,p) siendo p = P(de éxito en cada una de las experiencias) y n número de veces que se repite la experiencia. Antes de conocer una distribución binomial debemos aprender a distinguir cuando una distribución es binomial y cómo calcular su probabilidad.

Ejercicio 18: Di si las siguientes distribuciones son binomiales indicando los valores de n y p, y los valores que puede tomar la variable x:

a) Lanzamos 10 monedas y nos preguntamos por el número de caras.
b) Lanzamos 6 dados correctos y nos preguntamos por el número de 5.
c) Extraemos 5 cartas, sin reemplazamiento, de una baraja y nos preguntamos cuántas figuras saldrán.
d) Extraemos 5 cartas con reemplazamiento y observamos cuántas figuras saldrán.
e) Nos preguntamos cuántos partidos ganará el Betis en sus próximos 10 encuentros.
f) Una máquina produce tornillos y, por término medio, un 2% son defectuosos. Se empaquetan en cajas de 100 tornillos. Cuántos tornillos defectuosos habrá en cada caja.

Se define el **número combinatorio** y se denota por $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1).....(m-n+1)}{n(n-1)...3.2.1}$, los cuales se pueden calcular de forma más práctica mediante el **triángulo de Tartaglia**.

Ejercicio 19: Hallar $\binom{6}{3}, \binom{5}{2}, \binom{7}{2}, \binom{8}{5}, \binom{100}{4}, \binom{4}{0}, \binom{6}{0}, \binom{100}{0}, \binom{5}{1}, \binom{7}{1}, \binom{100}{1}, \binom{100}{100}, \binom{100}{99}$

Para el cálculo de probabilidades necesitamos "contar" para ello utilizamos los números combinatorios, donde $\binom{m}{n}$ representa de cuantas maneras podemos seleccionar n elementos de un total de m elementos distintos. Por ejemplo, en el lanzamiento de 4 monedas "obtener 3 caras" = {cccx, ccxc, cxcc, xccc} no ha sido difícil obtener los sucesos elementales, imaginemos que lanzamos 5 monedas: "obtener 3 caras" = {cccxx, ccxxc, cxxcc, xxccc, ccxcx, ..} *que los alumnos lo digan, ¿falta alguna?* No resulta fácil, resulta muy laborioso pero con los números combinatorios sabemos que hay $\binom{5}{3} = 10$.

Veamos como calcular la probabilidad de una distribución binomial, para ello pongamos el siguiente ejemplo: "Sacamos 5 cartas con reemplazamiento" y queremos calcular la **probabilidad de obtener 3** figuras. En primer lugar debemos comprobar que se trata de una distribución binomial: hay 5 extracciones y la probabilidad de obtener figura es 0´4, es una distribución binomial B(5,0´4). En segundo lugar para calcular la probabilidad de A, A="obtener 3 figuras" calculamos P[A en un cierto orden]=$0'4^3 . 0'6^2$ y $\binom{5}{3} = 10$ es el número de formas en que se puede obtener las tres figuras, por tanto P[A]= $\binom{5}{3} 0'4^3 . 0'6^2$.

En general, para una distribución binomial B(n,p), en la cual P[A]=p se tiene que:
P[k veces A y n-k veces A´] = P[x=k] = $\binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$ (se lee la probabilidad de k éxitos).
Los parámetros de esta distribución de probabilidad son $\mu = n . p$ y $\sigma = \sqrt{n p q}$

Ejercicio 20: En una binomial B(8;0´2), calcular P[x=0], P[$x \neq 0$], P[x=2], así como los parámetros μ y σ.

Ejercicio 21: En el proceso de fabricación de bombillas, el 0´5% son defectuosas. Se comercializan en paquetes de 100. Hallar las probabilidades de que en un paquete haya:

a) Ninguna defectuosa.
b) Alguna defectuosa.
c) Dos defectuosas.

Hallar los parámetros μ y σ de esta distribución.

Ejercicio 22: En una distribución binomial B (10; 0´4), calcula P[x = 0], P[x = 3], P[x = 5], P[x = 10] y el valor de cada uno de los parámetros μ y σ.

Ejercicio 23: Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y σ.

10.6 Ajuste de un conjunto de datos de una distribución binomial.

Ejercicio 24: Un profesor de idiomas tiene una clase con cuatro alumnos adultos. De los 100 días de clase, asisten 4, 3, 2, 1 o ninguno de ellos, según la tabla adjunta. Ajusta los datos a una distribución binomial y di si te parece que el ajuste es bueno o no. Dibuja los diagramas de frecuencias observadas y ajustadas.

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$100 \cdot p_i$	N^{os} teóricos	N^{os} observados, f_i	Diferencias
4				**23**	
3				**48**	
2				**17**	
1				**9**	
0				**3**	