EJERCICIOS DE REPASO DE LA UNIDAD 1: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

1.- Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |x^2 - 5x + 4|$ b) $y = |x| + |3x-2|$ c) $y = x\,|x|$

d) $y = \dfrac{1}{x-2}$ e) $y = \sqrt{x} + 3$ f) $y = |\operatorname{sen}(x)|$

g) $y = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

2.- Estudiar la continuidad y asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{x-1}$ b) $y = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x-1} & \text{si } x > 2 \\ 2x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d) $y = \dfrac{1+|x|}{1-|x|}$ e) $y = \operatorname{sen}(x^2-x)$ f) $y = e^{\frac{x+1}{x}}$

g) $y = \dfrac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ (no estudiar oblicua)

3.- Determinar el valor del parámetro (s) para que las funciones sean continuas.

a) $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\dfrac{\Pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\dfrac{\Pi}{2} < x < \dfrac{\Pi}{2} \\ 2 \cos x & \text{si } x \geq \dfrac{\Pi}{2} \end{cases}$

4.- La función $f(x) = \sec x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice esto al teorema de Bolzano?

5.- Calcula una raíz de la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ con una aproximación de una décima.

6.- Demuestra que existe algún x tal que $x\,2^x = 1$.

7.- Sea f una función continua en [0, 1] y tal que $0 < f(x) < 1 \ \forall\, x \in [0, 1]$. Probar que existe algún $c \in (0, 1)$ / $f(c) = c$.

8.- Sean f y g dos funciones continuas en [a, b] y supongamos que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Probar que $g(c) = f(c)$ para algún c en (a, b).

9.- Si $f(x)$ es continua en $[1, 9]$ y $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$ ¿Podemos asegurar que $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo $(1, 9)$?

10.- Sea la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$ continua en IR. ¿Se puede afirmar que existe al menos un punto $c \in [1, 2]$ / $f(c) = 2$?

11.- Si $f(x)$ es continua en $x = 5$ y $f(5) = 3$ entonces que podemos asegurar

a) f está acotada en su dominio.
b) Existe un entorno de 5, tal que si $x \in E(5, r)$ entonces $f(x) > 0$.
c) Existe un entorno de 5, tal que si $x \in E(5, r)$ entonces $f(x) < 0$
d) Existe un entorno de 5 en el cual la función está acotada.

12.- Si $f(x)$ es continua en $[5, 8]$ y además $f(5) = 1$ y $f(8) = 3$. Podemos afirmar que:

a) Todos los valores de f están en el intervalo $[1, 3]$.
b) $\exists\ c \in (5, 8)$ / $f(c) = 1'4$.
c) La función se anula en un punto.
d) Se verifica siempre que $f(c) > 1$ en este intervalo.

13.- Comprueba que las funciones $f(x) = e^x + e^{-x} - 1$ y $g(x) = e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

14.- La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ es continua en $(0,1)$ y $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$ pero no existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice al teorema de Bolzano?