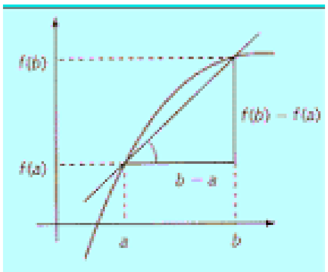
TEMA 7: DERIVADAS.

7.1 Concepto de derivada.
7.2 Reglas de derivación.
7.3 Recta tangente a f en x = a.

7.1 CONCEPTO DE DERIVADA.

Del concepto de límite obtendremos una gran herramienta, las derivadas. Lo curioso es que solo vamos a utilizar el límite para su definición pero para hacer el cálculo de derivadas aprenderemos unas fórmulas muy sencillas. El concepto de derivada no sólo nos prestará una ayuda primordial en la representación de funciones indicándonos donde la función es creciente o decreciente y localizando los máximos y mínimos, aunque eso lo estudiaremos en el próximo curso. Además nos ayudará a resolver problemas de optimización que tratan de localizar puntos dónde se obtienen mayores beneficios, menos gastos, etc.

Se llama **tasa de variación media** (T.V.M.) de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ al cociente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Y se denota por T.V.M. $[a,b]$.



$$\text{T.V.M. } [a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* Si la gráfica fuera de un movimiento la TVM sería la velocidad media en el intervalo correspondiente.

Si tomamos intervalos de longitud cada vez más menor (más pequeños), obtendremos la información que queremos, la variación en el punto de abscisa x = a llamado **tasa de variación instantánea** de una función y=f(x) en un punto x=a y es el siguiente límite:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A este límite también se le llama **derivada** de f en x = a y se denota por f´(a), es decir,
$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Se demuestra que **<u>la pendiente de la recta tangente a f en x=a es la derivada de f en x=a</u>**. La recta tangente a f en x = a que pasa por (a, f(a)) y tiene de pendiente m = f´(a) y su ecuación es de la forma: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Es evidente que si complicamos la función f el cálculo de la derivada mediante el límite será muy difícil, por ello es necesario buscar una forma más cómoda de realizar dichos cálculos. Los matemáticos han encontrado unas "fórmulas" llamadas reglas de derivación y que nos libran de hacer el límite. Aprendamos dichas reglas de derivación, en cada apartado aprenderemos una fórmula y pondremos uno o varios ejemplos de cómo aplicarla.

7.2 REGLAS DE DERIVACIÓN.

Para calcular la derivada de una función debemos utilizar las fórmulas de derivación, en cada apartado damos una fórmula y haremos varios ejemplos:

a) Derivada de una constante, $f(x) = k$ k una constante, un número → $f'(x) = 0$
Ejemplos:

a1) $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

a2) $f(x) = \frac{1}{2} \rightarrow f'(x) = 0$

a3) $f(x) = \sqrt{3} \rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

c) Derivada de una potencia $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$

c1) $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$
c2) $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^4$
c3) $f(x) = x^8 \rightarrow f'(x) = 8x^7$

d) Derivad de la suma $y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$

d1) $f(x) = x^2 + x^5 \rightarrow f'(x) = 2x + 5x^4$
d2) $f(x) = x^6 + 8 \rightarrow f'(x) = 6x^5 + 0 = 6x^5$

e) $y = k\,f(x) \rightarrow y' = k\,f'(x)$

e1) $f(x) = 3x^2 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$
e2) $f(x) = 3x^6 + 8x + 3 \rightarrow f'(x) = 3 \cdot 6x^5 + 8 \cdot 1 + 0 = 18x^5 + 8$
e3) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 3x + 4 \rightarrow f'(x) = 12x^2 + 6x + 3$

Ejercicio 1: Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{5}$

c) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = 4x - 5$

e) $f(x) = 6x - 3$

f) $f(x) = x^4$

g) $f(x) = x^9$

h) $f(x) = x^5 + x^7$

i) $f(x) = 2x^2$

j) $f(x) = 4x^3$

k) $f(x) = -5x^6$

l) $f(x) = 4x^2 - 2x$

m) $f(x) = -4x^3 + 2x - 1$

n) $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$

o) $f(x) = x^5 - 4x^3$

**Observación: Aunque el cálculo de máximos y mínimos se aprenderán el año que viene, te adelanto que estos se encuentran en aquellos puntos cuya derivada vale cero.

$f(x) = ax^2 + bx + c$, sabemos que su vértice es el máximo o el mínimo está en $x = \frac{-b}{2a}$.

Calculemos su derivada, $f'(x) = 2ax + b$, igualemos a cero → $2ax + b = 0$ → $2ax = -b$ → $x = \frac{-b}{2a}$, como puedes ver la fórmula del vértice se obtiene de igualar a cero la derivada de la función.

Ejercicio 2: Dada la parábola $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$:

a) Calcula $f'(x)$.
b) Resuelve $f'(x) = 0$.
c) Calcula su vértice, ¿qué observas?

f) Derivada de la potencia de una función $y = f(x)^n$ → $y' = n\, f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

f1) $f(x) = (x-3)^2$ → $f(x) = 2\,(x-3)^1 \cdot 1 = 2x - 6$
f2) $f(x) = (2x-3)^4$ → $f(x) = 4\,(2x-3)^3 \cdot 2 = 8\,(2x-3)^3$
f3) $f(x) = (x^2 - 3x)^3$ → $f(x) = 3\,(x^2 - 3x)^2\,(2x-3)$
f4) $f(x) = \frac{1}{x}$ atento, no necesitamos otra fórmula tan solo debemos escribir f de otra forma, debemos escribir $f(x) = x^{-1}$ →$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Ejercicio 3: Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x+1)^2$

b) $f(x) = (x+1)^3$

c) $f(x) = (2x-1)^2$

d) $f(x) = (x^2+1)^5$

e) $f(x) = (2x^3 - 4x)^2$

f) $f(x) = (x^5 + 3x^4)^5$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^{20}}$

j) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

g) $y = f(x) \,.\, g(x) \rightarrow y' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$

g1) $f(x) = 2x\,(x-3)^2 \rightarrow f(x) = 2\,(x-3)^2 + 2x \cdot 2 \cdot (x-3)^1 = 2(x^2 - 6x + 9) + 4x^2 - 12x = 2x^2 - 12x + 18 + 4x^2 - 12x = 6x^2 - 24x + 18$

g2) $f(x) = x^3\,(2x-3)^2 \rightarrow f(x) = 3x^2\,(2x-3)^2 + x^3 \cdot 2\,(2x-3)^1\,2 = 3x^2\,(2x-3)^2 + 4x^3\,(2x-3) = x^2\,(2x-3)\,[3\,(2x-3) + 4x] = x^2\,(2x-3)\,(10x-9)$

h) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$

h1) $f(x) = \dfrac{x+3}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{(x+3)' \cdot x - (x+3)\cdot(x)'}{(x)^2} = \dfrac{1\cdot x - (x+3)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{x - x - 3}{x^2} = \dfrac{-3}{x^2}$

h2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{(x^2+1)' \cdot x - (x^2+1)\cdot(x)'}{(x)^2} = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

h3) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1} \rightarrow f'(x) = \dfrac{(x^2+3x)' \cdot (x+1) - (x^2+3x)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{(2x+3)\cdot(x+1) - (x^2+3x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$

Si queréis os podéis saltar el segundo paso

Ejercicio 4: Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot (x+1)^2$

b) $f(x) = x^2 \cdot (x+1)^3$

c) $f(x) = 2x \cdot (2x-1)^2$

d) $f(x) = 3x \cdot (x^2+1)^2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

h) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

Resumen de las fórmulas de derivación:

a) $f(x) = k \quad k \in \Re$ → $f'(x) = 0$

b) $f(x) = x$ → $f'(x) = 1$

c) $f(x) = x^n$ → $f'(x) = n\,x^{n-1}$

d) $y = f(x) + g(x)$ → $y' = f'(x) + g'(x)$

e) $y = k\,f(x)$ → $y' = k\,f'(x)$

f) $y = f(x)^n$ → $y' = n\,f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

g) $y = f(x)\,.\,g(x)$ → $y' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$

h) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ → $y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejercicio 5: Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, calcula.

a) $f'(x)$.
b) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
c) La gráfica de f.
d) La gráfica de la recta tangente calculada en b junto a la gráfica de f.

Ejercicio 6: Dada la función $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$, calcula.

a) $f'(x)$.
b) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
c) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
d) La gráfica de f.
e) La gráfica de la recta tangente calculada en b junto a la gráfica de f.