Ejercicios de repaso de la unidad 12: PROPIEDADES MÉTRICAS.

1- Averiguar si el punto A incide a la recta r, en los siguientes casos:

a) A = (0,3,-1) y r: (x,y,z) = (0,1,0) + t(0,2,-1) con $t \in \Re$

b) A = (-3,2,1) y r: (x,y,z) = (4,0,5) + t(-4,3,2) con $t \in \Re$

2- Determinar la posición relativa de las rectas r y s en cada uno de los apartados y, si es necesario, según los valores de a. Calcula el punto de corte, si es posible.

a) r: $\left.\begin{array}{l} x=-1+3\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ s: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=-z+2$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1+\frac{1}{2}\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ s: $\left.\begin{array}{l} 3x-y-12=0 \\ x+2z-7=0 \end{array}\right\}$

c) r: $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=2+2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ s: $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=1-\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$

d) r: $\left.\begin{array}{l} x=1-2\lambda \\ y=\frac{3}{2}+2\lambda \\ z=2a+2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ s: $x+1=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

e) r: $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=3-\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ s: $2x-4=\dfrac{y-1}{a}=-2z+4$

3- Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\alpha: \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda+\mu \\ y=2+\lambda-\mu \\ z=3-\lambda+\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$ $\beta: \left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=-2+2\mu \\ z=-2\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$

b) $\alpha: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+2\lambda+\mu \\ z=-2+3\lambda+2\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$ $\beta: \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda+\mu \\ y=4+3\lambda+4\mu \\ z=-3-\lambda+\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$

c) α: x – 2y + z + 4 = 0 β: 7x – 2y + z + 4 = 0

d) $\alpha: \left.\begin{array}{l} x=1+\mu \\ y=2+\lambda-\mu \\ z=2+2\lambda+a\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$ $\beta: \left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=-2+2\mu \\ z=1-\lambda+\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$

e) α: x + 2y - 3z = 1 β: x – y = 1

f) α: x – 2y + z + 4 = 0 β: -ax + y = 1

4- Determinar la posición relativa del plano α y la recta r, calcula el punto de corte, si es posible:

a) r: $\left.\begin{array}{l} x=-2+3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3-2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ $\alpha: \left.\begin{array}{l} x=1-\lambda+\mu \\ y=1+\mu \\ z=6+\lambda \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$

b) r: $\left.\begin{array}{l} x=2\lambda \\ y=1+5\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ $\alpha: \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+\lambda+\mu \\ y=-\frac{1}{3}+2\lambda+3\mu \\ z=-3\lambda-\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$

c) r: $\left.\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$ α: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda - \mu \\ z = 3 - \lambda + a\mu \end{array}\right\} \lambda, \mu \in \Re$

d) r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = z - 1$ α: $x - y + 2z - 1 = 0$

5- Averiguar si el punto A pertenece al plano α en cada caso:

a) A=(-1,1,4) y α: $\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3 + \lambda - \mu \end{array}\right\} \lambda, \mu \in \Re$ b) A=(-1,3,1/3) y α: $\left.\begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = \frac{1}{3} + \mu \end{array}\right\} \lambda, \mu \in \Re$

c) A=(0, -1, 3) y α: 2x -3y = 5

6- Dada la recta r: $\frac{x}{a} = y = z + 1$ y el plano α: 2x – 3y + z + b = 0, calcula a y b para que sean la recta esté contenida en el plano.

7- Hallar las ecuaciones de dos planos paralelos que contengan respectivamente a las rectas: r: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3y + z - 5 = 0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 2 \end{array}\right\}$.

8- Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de los planos: π_1: x – y = 0, π_2: 2x + y – z = 1, π_3: 2y + z = -3; y es paralelo al plano π_4:x + 2y + 3z – 1 = 0.

9- Estudiar la posición relativa de los planos, calcula el punto de corte, si es posible:

a) π_1: -2x + y + 2z = -2, π_2: x + 7y – z = 1 y π_3: x + 2y – z = 1
b) π_1: 5x + z = -7, π_2: x - 2y – z = 1 y π_3: 3x - 3y - 2z = 2
c) π_1: 5x + 7y + 4z + 7 = 0, π_2: 2x + 3y + 6z + 5 = 0 y π_3: 6x + 8y - 4z + 9 = 0

10- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A=(1,2,-1), B=(3,2,0), y es paralelo a la recta r: $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\}$

11- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A = (3, 1, 0), B = (-1, 2, 1) y es paralelo a la recta r: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

12- Hallar el valor de "a" para que las rectas r: $\frac{x}{2} = y + 3 = \frac{z}{2}$ y s: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{a} = \frac{z-7}{4}$ determinen un plano.

13- Calcular el valor de "a" para que las rectas r y s sean coplanarias, siendo r: $\left.\begin{array}{l} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 3z - 3 = 0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{l} x - 2y + z + 1 = 0 \\ -x + y - z + a = 0 \end{array}\right\}$.

14- Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r: $x-3=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3}$ y es paralelo a la recta s: $\left.\begin{array}{r} x=3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \lambda \in \Re$.

15- Hallar a y b para que la recta r esté contenida en el plano π siendo r: $\frac{x}{a}=y=z+1$ y π:2x -3y + z + b = 0.

16- Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto P = (- 1, 0 , 4) y es perpendicular a la recta r: $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{5}$.

17- Determina p para que r y s sean perpendiculares:

a) r: $\frac{x}{p}=y-1=\frac{z-2}{2}$ y s: $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-7}$.

b) r: $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z+1=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{r} px-y+3z=0 \\ x+4z=0 \end{array}\right\}$.

18- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z+1=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{array}\right\}$ y es perpendicular al plano π:x + 2y – 4z – 1 = 0.

19- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A = (3,1,0), B = (-1,2,1) y es paralelo a la recta r: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{array}\right\}$.

20- Hallar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto A = (1,4,1), es paralela al plano de ecuación x + y + z – 1 = 0 y corta perpendicularmente a la recta de ecuación s: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=z$.

21- Hallar la ecuación de una recta sabiendo que pasa por el punto P = (1,2,7) y es perpendicular a las rectas r: $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{array}\right\}$ y s: $\left.\begin{array}{r} 3x-y+3z=0 \\ x+4z-2=0 \end{array}\right\}$.

22- Hallar la ecuación de una recta contenida en el plano π:3x + y – z = 0, pasa por el punto A = (1,-3,0) y es perpendicular a la recta r: $\left.\begin{array}{r} x+2y-3z+1=0 \\ 2x-y+z-2=0 \end{array}\right\}$.

23- Determina la proyección ortogonal y el simétrico del punto P = (-1,4,2) respecto de la recta r: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2}$.

24- Determina la proyección ortogonal y el simétrico del punto P = (4,-2,1) respecto del plano π:2x- 3y + 2z - 4 = 0.

25- Determinar el ángulo de las rectas r y s en los siguientes apartados:

a) r: $x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$ y s: $\frac{x-3}{2}=y+1=z-1$.

b) r: $\left.\begin{matrix} 2x+y+z+1=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{matrix}\right\}$ y s: $\left.\begin{matrix} 3x+2y+3z-2=0 \\ x+4y-z+4=0 \end{matrix}\right\}$.

26- Determina el ángulo del plano π:2x- y + 3z - 1 = 0 y la recta r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$.

27- Determinar el ángulo de los planos en los siguientes apartados:

a) π:2x - y + 2z + 3 = 0 y π':5x + 2y - 3 = 0.

b) π: $\left.\begin{matrix} x=-2-\lambda+2\mu \\ y=1+\lambda+3\mu \\ z=4-\lambda+\mu \end{matrix}\right\}$ y π': $\left.\begin{matrix} x=\lambda-\mu \\ y=3\lambda-\mu \\ z=4\lambda+\mu \end{matrix}\right\}$ $\lambda,\mu\in\Re$.

28- Halla la distancia del punto P = (3,2,1) al plano π:2x - y + 2z + 3 = 0.

29- Halla la distancia del punto P = (1,0,3) a la recta r: $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{matrix}\right\}$.

30- Halla la distancia entre los planos π:x - y + z - 1 = 0 y π':-2x + 2y - 2z + 5 = 0.

31- Halla la distancia entre las rectas r: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4}$ y s: $x+1=\frac{2(y-3)}{3}=\frac{z-1}{2}$.

32- Calcula el punto de la recta r: $x=y-2=\frac{z-3}{2}$ que equidista de los puntos A=(1,0,1) y B = (0,4,2).

33- Determina un punto sobre la recta r: $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y-1=\frac{z-3}{2} \end{matrix}\right\}$ que equidiste de los planos π:z + x - 1 = 0 y π':y - z = 3.

34- Dado el tetraedro O = (0,0,0), A = (1,0,0), B = (0,2,0) y C = (0,0,3), calcular:

a) Su volumen.
b) La altura relativa a la cara ABC.
c) Distancia entre AB y OC.
d) El ángulo de las aristas AB y OA, AB y BC.

35- Determina, si es posible, el plano que pasa por las rectas r: $\left.\begin{matrix} 3x-2y-9=0 \\ 3y+z-4=0 \end{matrix}\right\}$ y s: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{3}$

36- Halla el valor del parámetro a para que las rectas r: $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$ y s: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{a}=\frac{z-7}{4}$ determinen un plano.

37- Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto A = (5,-8,3) y corta a las rectas s: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{4}$ y t: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$.