Unidad 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: NOTACIÓN MATRICIAL:

En este primer apartado lo único que vamos a hacer es poner "nombres" y buscar la forma en que las matrices nos pueden ayudar a resolverlos.

Consideremos un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas (implícitas) :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las incógnitas, los nos a_{ij} reciben el nombre de coeficientes de las incógnitas y los números b_i son los términos independientes.

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden expresar mediante matrices teniendo en cuenta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & \dots & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes Matriz ampliada.

Por tanto nuestro sistema tendría la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es la matriz de las incógnitas y

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ la matriz de los términos independientes.

Es decir, nuestro sistema en forma matricial será: $A \cdot X = B$.

Llamaremos **solución** del sistema a n números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que al sustituirlos respectivamente por $x_1, x_2, \dots, x_n$ se verifican las m ecuaciones. Según el número de soluciones, tenemos la siguiente clasificación: Diremos que un sistema es

compatible si admite al menos una solución. Diremos que un sistema es **compatible determinado** si tiene <u>una única</u> solución. Diremos que un sistema es **compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones. Diremos que un sistema es **incompatible** si no admite ninguna solución. Observa que no puede tener dos soluciones o tres,…, tiene una, infinitas o ninguna.

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. Para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes tenemos las siguientes transformaciones:

1) Cambiar el orden de las ecuaciones.
2) Multiplicar una ecuación por un número real distinto de cero.
3) Suprimir ecuaciones que son combinación lineal de otras o proporcionales.
4) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de dicha ecuación con otras ecuaciones (recuerda que combinación lineal significa suma de una o varias ecuaciones multiplicadas o no por un cierto número, por ejemplo E_2 se cambia por $E_2 + 3E_1$).

**Observa que las ecuaciones se refieren a las filas de las matrices. Por tanto las transformasciones son para filas, <u>solo para filas</u>.

2.2 RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Veremos dos formas de resolver sistemas, aunque hay un tercera: la regla de Cramer. Si queréis aprender la regla de Cramer podéis echar un vistazo al libro y/o preguntarme. Para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante **ecuaciones matriciales**, simplemente debes recordar que un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir como $A \cdot X = B$. Si despejamos X, al igual que hicimos en la unidad anterior, obtenemos $X = A^{-1} . B$, si existe A^{-1}.

Ejercicio resuelto: Comprueba que el siguiente sistema se puede resolver mediante la inversa de la matriz de coeficientes y calcula su solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + 5y - 3z = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} . B$$

Lo primero que tenemos que ver es que existe A^{-1}, para ello tenemos que ver que su determinante es distinto de cero.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (12+1-5)-(2+10-3) = -1$, por tanto la matriz tiene inversa (regular o invertible). Calcula A^{-1}. Obtendrás $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ y por tanto:

$X = A^{-1} . B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ -7 & 9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 61 \end{pmatrix}$, es decir, x = 12, y = 35 y z = 61

Ejercicio 1: (21, página 68) Resuelve el siguiente sistema lineal utilizando la inversa de la matriz de coeficientes (no olvides comprobar que existe la inversa):

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -7 \\ -5x + y = 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ x + 2y + z = 12 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ -y + z = 2 \\ -x + y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 6 \\ 2x - z = -2 \\ -6x - y = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$

¿Qué ocurre si no existe la matriz inversa de A? Tenemos otro método, el método de Gauss.

El **método de Gauss** se basa en las transformaciones comentadas en el apartado 1 de esta unidad, recuerda que las transformaciones son por filas, NUNCA por columnas. Puedes encontrar ejercicios resueltos en las páginas 62 y 62, es muy importante que las mire, trata de hacerlos y podrás ver si cometes errores.

Ejercicio 2: Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas lineales y resuelve cuando sea posible:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -7 \\ -5x + y = 7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = -2 \\ x - 2y + z = 3 \\ x + 5y - 3z = 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 8 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y - 3z = 0 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x + y + 4z = 1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = 15 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x - y - 3z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{array}\right\}$

Puedes hacer más ejercicios, en la página 63 los ejercicios 9 y 10 (ten cuidado algunos apartados los hemos hecho en el ejercicio 2).

Ejercicio 3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 4 \\ -2x - 4y + 3z = 3 \\ 3x + 5y - z = -6 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 3z = 0 \\ 3x + 7y - 5z = 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 5 \\ 2x - 2y - 3z = 5 \\ 4x - 4y - z = 15 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=-4 \\ 3y+2x+z=9 \\ -x+2y-2z=-5 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=7 \\ x+z=4 \\ 3x-2y+z=2 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x+3y-z=2 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{array}\right\}$

2.3 APLICACIONES DE LOS SISTEMAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

Es evidente que gracias a los sitemas de ecuaciones lineales podremos resolver muchos problemas. Veamos cómo utilizarlo.

Ejercicio resuelto 1: Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.
a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.
b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Solución:
x = precio del lápiz, y = precio de un rotulador y z = precio de una carpeta
Por tanto si 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas son 15 euros → 3x + y + 2z = 15

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=15 \\ 2x+4y+z=20 \\ x+7y=25 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+7y=25 \\ -20y+2z=-60 \\ -10y+z=-30 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+7y=25 \\ -20y+2z=-60 \\ 0=0 \end{array}\right\}$ SCI, por tanto no podemos averiguar el precio de cada.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=15 \\ 2x+4y+z=20 \\ z=10x \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=15 \\ 10y-z=30 \\ -10y-23z=-150 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=15 \\ 10y-z=30 \\ -24z=-120 \end{array}\right\}$

Por tanto z = -120/-24 = 5 → y = 3,5 → x = 0,5. Solución el lápiz cuesta 50 céntimos, el rotulador cuesta 3€ 50 céntimos y la carpeta 5 €.

Ejercicio resuelto 2: De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A, B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:
• La empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
• El beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.
a) Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C.
b) Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

Solución:
Sea x = € de beneficios de la empresa A, y = € de beneficios de la empresa B y z = € de beneficios de la empresa C.

a) $\left.\begin{array}{l} y = x + z \\ 2x = y + z \\ x = 2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$ Por tanto no podemos determinar ni x, ni y, ni z, no podemos determinar el beneficio de cada empresa.

b) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x + y + z = 210 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 6z = 210 \end{array}\right\}$ → z = 35 → y = 105, x = 70. Solución, la empresa A ha obtenido 70 millones de euros, la empresa B obtiene 105 millones y la empresa C obtiene 35 millones.

En el libro hay más problemas resueltos en el libro (tres ejemplos, 38, 39), páginas 74 y 75.

Ejercicio 4: (40) Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan las otras dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con 20 €. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

Ejercicio 5: (41) Una naviera ha vendido 128 cruceros de los tipos A, B y C, cuyos precios son 1.500, 600 y 900 € respectivamente, recaudando 112.800 €. Si por cada persona que va al crucero A, dos van al crucero C, ¿cuántas personas van al crucero B?

Ejercicio 6: (42) Una persona decide invertir un total de 60.000 €, repartidos en tres entidades de ahorro distintas: A, B y C. Esta persona decide que la cantidad invertida en la entidad A sea la mitad de la cantidad total invertida en las entidades B y C. Además, se sabe que la entidad A le ha asegurado una rentabilidad del 5%, la entidad B, una rentabilidad del 10%, y la entidad C, una rentabilidad del 2%. Calcula las cantidades invertidas en cada entidad de ahorro sabiendo que los beneficios totales han sido de 4.200 €.