UNIDAD 3: PROGRAMACIÓN LINEAL (10 sesiones)

3.1 Inecuaciones polinómicas y racionales.
3.2 Sistemas de inecuaciones.
3.3 Programación lineal. Aplicación a la resolución de problemas.

3.1 INECUACIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES.

A lo largo de esta unidad trataremos de resolver problemas que nos plantean situaciones abiertas en las que debemos decidir que opciones son las más óptimas, trataremos de crear una función objetivo de la que queremos su máximo o mínimo. Con la programación lineal podremos diseñar redes de transportes eficaces, dietas apropiadas, producciones más beneficiosas o reducir los costes.

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Una **solución** de una inecuación es un valor de x con el cual se cumple la desigualdad, normalmente son infinitas por ello se representan mediante intervalos (conjunto solución). Un **sistema** de inecuaciones está formado por dos o más inecuaciones con una o más incógnitas. Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Inecuaciones lineales de primer grado con una incógnita: Se resuelven igual que las ecuaciones de primer grado, salvo que al dividir o multiplicar por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad. Sus soluciones se expresan en forma de intervalo. *No olvidar comprobar algunas soluciones y recordar la representación de la parábola.*

Inecuaciones polinómicas de grado 2 o superior y racionales: Calculamos las raíces del polinomio o polinomios, colocamos las raíces sobre la recta real, estudiamos el signo de factor en cada intervalo y finalmente escribimos la solución.

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas o racionales:

a) $2(x - 1) + 3 \leq 2x - 7$

b) $3x - 1 \geq 4x + 5 - 2(x + 3)$

c) $7(x + 1) - 3(x + 2) < 2(2x - 3) + 1$

d) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{6} > 1 - \frac{2x-5}{2}$

e) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{x}{2}$

f) $x^2 - 3x \geq -2$

g) $(2x - 1)(3x + 5) > 0$

h) $\frac{x^2+2}{3} - \frac{1-x}{2} \geq \frac{1}{2}$

i) $2(x-1)^2 + x < 4 - (2x+1)^2$

j) $x^3 + x \geq 0$

k) $x^3 + 4x^2 - 3x - 10 < 8$

l) $x^3 + x^2 - x \leq 1$

m) $x^3 + 3x(x-5) + 6 \geq 3(2-5x)$

n) $\frac{x+3}{x-1} \geq 0$

ñ) $\frac{2x+3}{x+1} > 0$

o) $\frac{2x-1}{1-x} \leq -3$

p) $10 + \frac{84}{x-5} \leq -7 - 3x$

q) $\frac{x^3 - 2x^2 - 19x + 20}{x^2 + x - 6} \geq 0$

Podéis encontrar ejercicios resueltos en las páginas 88, 89 y 90.

3.2 SISTEMAS DE INECUACIONES.

Cuando tenemos dos o más inecuaciones, tendremos un sistema de inecuaciones. Vamos a distinguir si el sistema tiene una o dos incógnitas.

<u>Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita</u>: La solución de este sistema de inecuaciones es el conjunto de números reales que pueden tomar las incógnitas que satisfacen todas las inecuaciones y es igual a la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones que la forman. Para resolverlas, resolvemos cada inecuación de forma independiente y para obtener la solución hacemos la intersección de las soluciones obtenidas.

Ejercicio 2: (8 y 9 pág 91) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-5 > 7-3x \\ 3-x > 4-5x \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2} - 3 > 2-5x \\ x-1 \leq 2(3-2x) \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \frac{-1}{x+5} \geq 0 \\ x-4(x-3) > 5-4x \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{c} 2x \leq 5x-9 \\ 3x-2 < 2x-(7-2x) \\ x > 2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 5x - 6 \geq 0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{c} \frac{x^3-1}{x^2-6x+9} \geq 0 \\ -x^2 - 3x > 0 \end{array}\right\}$

Repasa los ejercicios resueltos de la página 91.

Inecuaciones lineales con dos incógnitas: Las soluciones son un conjunto de puntos del plano que forman un semiplano que queda a uno de los lados de la recta, si es menor o igual o mayor o igual, se incluirán los puntos de la recta.

Ejercicio 3: Resuelve las siguientes inecuaciones con dos incógnitas:

a) $3x + 2y \geq 6$ b) $x - y + 1 \geq 0$ c) $x \leq -2$ d) $y > 1$

e) $3(2x - 3) - (2 - 6y) < 1$ f) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} > -1$

Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas: La solución está formada por los puntos del plano que verifican todas las inecuaciones. Para calcularla consideramos la intersección de los semiplanos que son solución de cada una de las inecuaciones. La solución da lugar a un recinto poligonal o un recinto abierto. Si la intersección está dentro de uno de los semiplanos se dice que la restricción es **redundante**. Necesitamos regla y trabajar con hojas cuadriculadas.

Ejercicio 4: Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y \geq 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x > -2 \\ y \leq 3 \\ 2x + 2y \geq 5 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x + 4y < -6 \\ x - 2y \geq -2 \\ y < 1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{l} 3x + y \leq 12 \\ x + 6y > 18 \\ x + y \geq -5 \\ x \geq 0 \\ y \leq 6 \end{array}\right\}$

Puedes encontrar ejemplos resueltos en la página 93.

3.3 PROGRAMACIÓN LINEAL. APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La programación lineal nació como apoyo a la toma de decisiones militares durante la Segunda Guerra Mundial en Inglaterra, al terminar la guerra comenzaron a desarrollar programas de investigación que derivaron en la programación lineal. A mediados del siglo XX el matemático norteamericano George Bernard Dantzing ideó y creó el método SIMPLEX con el cual se puede resolver cualquier problema de programación lineal.

La **programación matemática** es una técnica para calcular el valor óptimo de una función objetivo cuyas variables están sujetas a un conjunto de restricciones. Cuando la función objetivo y las restricciones son lineales, se dice que se trata de un problema de **programación lineal**. Un problema de programación lineal consta de los siguientes elementos:

1) Un conjunto de variables, llamadas **variables de decisión**.
2) Una **función objetivo** de primer grado con las variables de decisión y que se pretende optimizar (tomar la mejor decisión).
3) Un conjunto de **restricciones** establecidas mediante relaciones lineales que pueden ser de igualdad o desigualdad.

Hay problemas dónde al plantear los datos obtenemos un ejercicio del tipo resuelto que viene a continuación. ¿Qué debes tener en cuenta?: a) Traer regla y trabajar con hojas cuadriculadas. b) Al dibujar las rectas primero debes tener en cuenta los números que has obtenido en las tablas de valores. c) Sombrear los semiplanos de distintos colares para que sea más fácil identificar la región factible (S). d) Numerar las rectas para que sea más fácil expresar la resolución, observa el siguiente ejercicio resuelto. e) Son tres pasos, cálculo de la región factible, cálculo de los vértices y sustitución en la función objetivo para identificar los máximos y/o mínimos. f) Cuando en un problema real añadimos $x \geq 0$ y/o $y \geq 0$, se le llama condiciones de no negatividad, es decir, si x y/o y representa a un número que no puede ser negativo. g) ¿Qué significa que una condición es redundante? Si la condición no aporta nada a la región factible. h) Conviene escribir los datos de los problemas en forma de tabla.

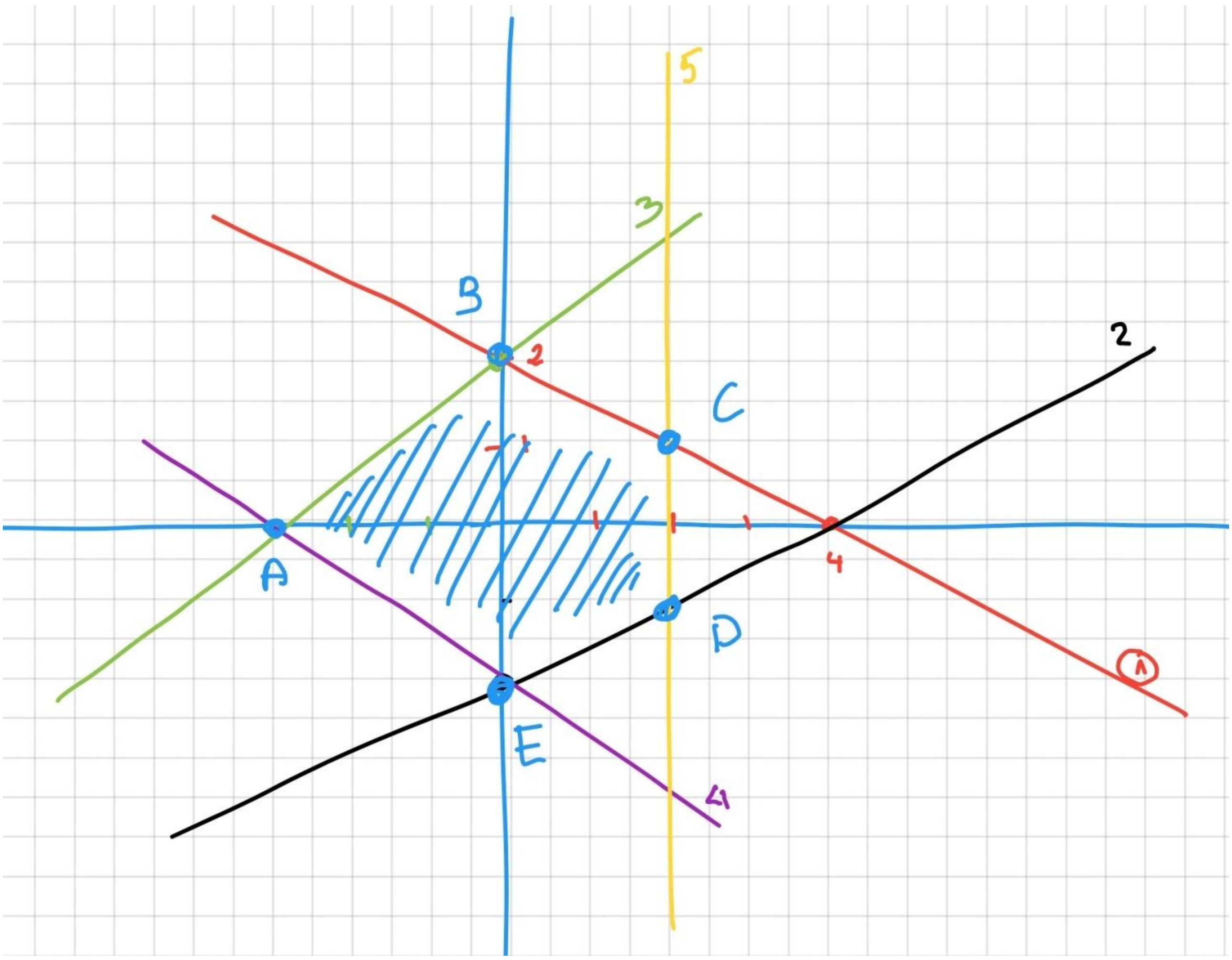
Ejercicio resuelto: (20) Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal: Max z = 2x + y sujeta a:

$$\left.\begin{array}{c} x + 2y \leq 4 \\ x - 2y \leq 4 \\ 2x - 3y \geq -6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \leq 2 \end{array}\right\}$$

Resolución:

En primer lugar realizamos las tablas de valores ($x = 0$ e $y = 0$) para representar las rectas 1) $x + 2y = 4$, 2) $x - 2y = 4$, 3) $2x-3y = -6$, 4) $2x + 3y = -6$ y 5) $x = 2$

Dibujamos las rectas (no olvides poner el número asociado) y rayamos el semiplano de cada recta con un color diferente, de esa forma podremos ver la región factible (donde se encuentran todos los colores).



Señalamos los vértices de la región factible, algunos son fáciles y otros tenemos que calcularlo como intersección de dos rectas. Obtendremos:

A = (-3, 0)   B = (0, 2)   C = (2, 1)   D = (2, -1)   E = (0, -2)

Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices,

$z_A = 2 \cdot (-3) + 0 = -6$, $z_B = 2$, $z_C = 5$, $z_D = 3$, $z_E = -2$, por tanto el máximo se alcanza en C.

Ejercicio 5: (18) Consideremos la región definida por $\left.\begin{array}{r} x+y\geq 2 \\ 2x+y\leq 6 \\ 0\leq y\leq 4 \\ 0\leq x\leq 2 \end{array}\right\}$:

a) Calcula, si existen, los puntos que dan el valor mínimo a la función f(x,y) = x – 2y en la región S.
b) Obtén los máximos y mínimos de la función g(x,y) = 3x + 3y en la región S.
c) ¿Pertenece el punto (1,3) a la región factible? ¿Y el punto (2,4)?

Ejercicio 6: (19) Considera la región S del plano definida por las siguientes restricciones:

$\left.\begin{array}{r} y\geq 2x-4 \\ y\leq x-1 \\ 2y\geq x \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ Obtén, de forma gráfica, los valores máximos y mínimos de la función z = x – 3y en S.

Ejercicio 7: (21) Resuelve analíticamente el siguiente problema de programación lineal.

Max y Min z = x + 2y sujeta a: $\left.\begin{array}{r} 3x+2y\geq 6 \\ 3x-4y\leq 6 \\ 3x+4y\leq 30 \\ 3x-2y\geq -6 \end{array}\right\}$.

Ejercicio 8: (22) Halla el valor máximo de las funciones F(x,y) = 6x + 5y y G(x,y) = 2x + 4y en la región del plano definida por las inecuaciones: $0\leq x$; $0\leq y$; $3x + y\leq 60$ y $x + 2y\leq 40$. ¿Pertenece el punto (10,10)? ¿Y el punto (10,20)?

Ejercicio 9: (24) Una empresa, que abastece los lotes de perfumería de un supermercado, dispone en el almacén de 240 frascos de gel, 95 de champú y 270 de crema de manos. Los lotes son de dos tipos: A y B, de forma que el lote A está compuesto por 2 frascos de gel, 1 de champú y 3 de crema de manos, mientras que el lote B está formado por 3 frascos de gel, 1 de champú y 2 de crema de manos. Cada lote del tipo A le produce un beneficio de 25 €, y cada lote del tipo B, de 22 €. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe preparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Ejercicio 10: (25) El terreno dedicado a una plantación de hortalizas precisa semanalmente un mínimo de 16 kg de abono mineral y un mínimo de 18 kg de abono vegetal. En el mercado existen dos paquetes de abono P_1 y P_2. El paquete P_1 contiene 2 kg de abono mineral y 5 kg de abono vegetal y cada paquete P_2 contiene 3 kg de abono mineral y 2 kg de abono vegetal. Cada paquete de tipo P_1 cuesta 15 € y cada paquete de tipo P_2 cuesta 10 €. Calcula el número de paquetes de cada tipo que se deben adquirir para que el coste sea mínimo.

Ejercicio 11: Complicado (26) Se deben transportar naranjas de las ciudades de Gandía y Cullera a las ciudades de Burgos, Oviedo y Coruña. Las cantidades ofertadas son 500 kg de Gandía y 750 kg de Cullera. Las cantidades demandadas son 250 kg por Burgos, 500 kg por Oviedo y 500 kg por Coruña. Los costes, en céntimos por kilogramo, de transportar de una ciudad a otra son:

	Burgos	Oviedo	Coruña
Gandía	1	2	2
Cullera	2	2	3

Establece la mejor forma de realizar el transporte para que el coste total sea mínimo. ¿Hay una única solución?

Ejercicio 12: (27) Una persona debe alimentar a su mascota. En la tienda de mascotas hay dos tipos de pienso, A y B, para dicha mascota, con las siguientes composiciones y precio por paquete:

	Proteínas	Hidratos de Carbono	Grasas	Precio
A	1 g	5 g	3 g	2 €
B	2 g	2 g	2 g	1,7 €

Dicha mascota debe comer diariamente, al menos 8 g de proteínas, 20 g de hidratos de carbono y 16 g de grasas. Determina cuántos paquetes de cada tipo debe comer para que la dieta tenga un coste mínimo.

Ejercicio 13: (selectividad) Un Ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a los sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.
Para ello la empresa constructora dispone de una capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 € y la de tipo B 300000 €.

Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20000 € y por una de tipo B a 40000 €, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?

Ejercicio 14: (selectividad) Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones: $y - x \leq 4$; $y + 2x \geq 7$; $-2x - y + 13 \geq 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x, y) = 4x + 2y - 1$.

Ejercicio 15: (selectividad) De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones: $4x + 3y \geq 60$; $y \leq 30$; $x \leq \frac{10+y}{2}$; $x \geq 0$ y $y \geq 0$

a) Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.
b) Maximice en esa región factible la función objetivo $F(x,y) = x + 3y$.
c) ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

Ejercicio 16: (selectividad) Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2,5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2.

La producción de una luna delantera precisa de 0,3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0,2 horas. La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.

Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.

Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.