UNIDAD 6: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

6.1 Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremos relativos.
6.2 Curvatura y puntos de inflexión.
6.3 Problemas de optimización.
6.4 Propiedades globales de las funciones.

6.1 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN. EXTREMOS RELATIVOS.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo (a, b) de su dominio si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo, con $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) > f(x_1)$. Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del intervalo, con $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) < f(x_1)$. *Hacer gráficas y dibujar cada elemento.*

Si la función es derivable, podemos afirmar que:

a) Si f´ es positiva en (a, b) entonces f es creciente en dicho intervalo.
b) Si f´ es negativa en (a, b) entonces f es decreciente en dicho intervalo.
c) Si f´(a) = 0 entonces f presenta un máximo o un mínimo relativo en a.

Ejercicio 1: Estudia el crecimiento y decrecimiento (monotonía) y los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

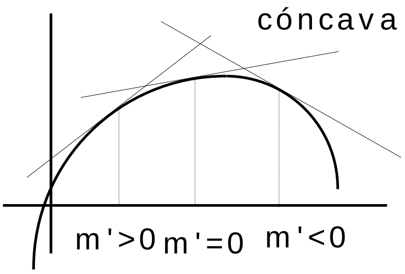
d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x \ge 0 \\ \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

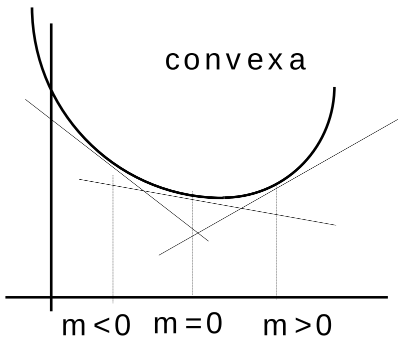
e) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \le -1 \\ \frac{x}{x+2} & \text{si } -1 < x \le 0 \\ x^2 + \frac{1}{2}x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

6.2 CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Una función f es **cóncava** en un intervalo si al unir dos puntos de dicho intervalo, el segmento que los une queda por debajo de la gráfica de f en dicho intervalo. Una función f es **convexa** en un intervalo si al unir dos puntos de dicho intervalo, el segmento que los une queda por encima de la gráfica de f en dicho intervalo. Se dice que f tiene un **punto de inflexión** en x = a si la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.





Estudiando la segunda derivada de f tenemos información sobre su gráfica:

a) Si f´´ es positiva en (a, b) entonces f es convexa, U, en dicho intervalo.
b) Si f´´ es negativa en (a, b) entonces f es cóncava, $\cap$, en dicho intervalo.
c) Si f´´(a) = 0 entonces f puede presentar un punto de inflexión en a.

Ejercicio 2: Estudia la concavidad y convexidad (o curvatura) de las siguientes funciones y calcula sus puntos de inflexión:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x \ge 0 \\ \dfrac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si } -1 < x \le 0 \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } 2 < x < 4 \\ \dfrac{x-3}{x} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

Ejercicio 3: De la función f definida por $f(x) = ax^3 + 2x^2 - 5x + b$ se sabe que tiene un punto de inflexión en el punto A(1, 3).

Ejercicio 4: El rendimiento físico, evaluado de 0 a 100, de un ciclista durante una prueba de esfuerzo de 15 minutos de duración queda bien descrito a través de una función $R(t) = at^2 + bt + c \quad 0 \leq t \leq 15 \quad a \neq 0$. Sabiendo que alcanza el máximo rendimiento a los 10 minutos y que finaliza la prueba con un rendimiento de 75, se pide:

a) Halla los coeficientes a b y c, justificando la respuesta.
b) Representa la función obtenida.

Ejercicio 5: Halla los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en x = 1, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo de abscisa x = 3.

6.3 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

La mayor aplicación de la derivada es la resolución de problemas de optimización: calcula el beneficio máximos, calcula el menor coste, calcula la mayor superficie, calcula la mayor capacidad, … A través de la primera derivada hemos visto que como calcular el máximo <u>absoluto</u> o mínimo <u>absoluto</u> de una función derivable. En algunas ocasiones las funciones no son derivables, por ello necesitamos otras herramientas. Para resolver un problema de optimización debemos seguir los siguientes pasos:

1) Nombrar las variables y definir la función la cual queremos maximizar o minimizar.
2) Si tenemos dos variables, debemos buscar una relación entre ambas.
3) Despejamos una de las variables de la relación anterior y sustituimos en nuestra función, nuestro objetivo es que la función tenga una sola variable.
4) Se establece el intervalo [a, b] en el que se mueve la variable, teniendo en cuenta el contexto del problema.
5) Derivamos la función, salvo si la función es una parábola.
6) Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
7) El máximo o el mínimo absoluto está entre los siguientes casos:
    a. Puntos dónde la función no es derivable.

b. Puntos dónde la derivada vale 0.
c. Los extremos de los intervalos.

Para saber cuál es el máximo o el mínimo absoluto, calculamos la imagen de estos puntos y elegimos el adecuado.

Ejercicio resuelto: La suma de dos números no negativos es 14. Calcúlalos para que su producto sea el mayor posible.

1) Llamo x e y a cada uno de los números buscados. Queremos que el producto sea máximo, por tanto defino $P(x, y) = x \cdot y$
2) ¿Qué relación hay entre x e y. La suma de dos números es 14 → $x + y = 14$
3) $y = 14 - x$ (a veces es más fácil despejar una, es fácil de vez, en este caso nos da igual) y sustituimos en $P(x, y) = x \cdot y$ → $P(x) = x \cdot (14 - x) = 14x - x^2$
4) dos números no negativos → $x \geq 0$, en este caso no se trata de un intervalo.
5) $P'(x) = 14 - 2x$
6) $[0, 7)$ crece $(7, +\infty]$ decrece
7) En este caso (al ser una parábola) el mínimo está en el vértice, $x = 7$.
8) No olvides expresar bien la solución, los números buscados son 7 y 7.

Ejercicio 6: Una empresa alquila 65 estudios. Alquilando cada uno por 600 €, conseguiría alquilarlos todos y por cada 20 € que aumente el alquiler, alquilaría 1 menos. Si cada estudio tiene 60 € mensuales de gastos, ¿a cuánto debe alquilarlos para obtener el máximo beneficio?

Ejercicio 7: Una cadena de montaje está especializada en la producción de un modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, $C(x)$, se relacionan con el número de motocicletas fabricadas, x, mediante la expresión: $C(x) = 10x^2 + 2000x + 250000$ Si el precio de venta de cada motocicleta es de 8000 € y se venden todas las fabricadas, se pide:

a) Define la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las unidades vendidas.
b) ¿Qué función expresa los beneficios de la cadena?
c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán los mismos?

Ejercicio 8: En una empresa la relación entre la producción x (en miles de toneladas) y el coste medio de fabricación $C(x)$ (en miles de euros) es de la forma: $C(x) = 2 + x + \frac{9}{x}$ con $1 \leq x \leq 10$.

a) Calcula la cantidad de producción que minimiza el coste medio y cuál es dicho coste mínimo.
b) Calcula la cantidad de producción que maximiza el coste medio y cuál es dicho coste máximo.

c) Si no se desea superar los 12 mil euros de coste medio, ¿entre qué valores deberá estar comprendida la producción?

6.4 PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES.

En esta unidad vamos a resumir lo que ya conocemos de las funciones y añadiremos algunos conceptos que nos ayudaran a representar la gráfica de una función.

Pasos que debemos dar para representar una función, por ejemplo:

1) Dominio D(f).
2) Simetría:
    a. Simetría par o simetría respecto del eje de ordenadas: $f(-x) = f(x)$.
    b. Simetría impar o simetría respecto del origen de coordenadas: $f(-x) = - f(x)$.

    En general lo tendremos en funciones polinómicas, de simetría par si todas las potencias son pares (al término independiente lo consideramos de simetría par) y de simetría impar si todas las potencias son impares.
3) Continuidad de la función.
4) Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
    a. Corte con el eje y, $x = 0$
    b. Corte(s) con el eje x, $y = 0$.

    Signo de la función. Indicar si es positiva o negativa, teniendo en cuenta los puntos de corte y los puntos de discontinuidad.
5) Funciones periódicas, por ejemplo $f(x) = \operatorname{sen}x$. En este curso no veremos funciones periódicas.
6) Monotonía: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos. Debemos tener cuidado con los puntos de tangente horizontal.
7) Curvatura: Cóncava o convexa, puntos de inflexión.
8) Asíntotas:
    a. Vertical en $x = a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
    b. Horizontal en $y = k$ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$.
    c. Oblicua en $y = mx + n$, con $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.
9) Recorrido R(f) (conjunto de valores que toma y, lo veremos sobre la gráfica).

Observaciones:

1) Si realizamos el estudio de una gráfica de una función polinómica, no es necesario realizar los nueve puntos anteriores, puedes saltarte los pasos 3, 5 y 8. Ya que una función polinómica siempre es continua, no es periódica y no tiene asíntotas (salvo cuando es una recta).
2) Dos conceptos que no debes olvidar son los **Puntos singulares** son aquellos en los que $f'(x) = 0$ y los **puntos críticos** son aquellos en los que la función es continua y o bien $f'(x) = 0$ o bien no existe $f'(x)$.

Ejercicio 9: Realiza un estudio completo y esboza la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

c) $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$

d) $f(x) = x^4 - x^2$

e) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x^2-4} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 10: Estudia el dominio, puntos de corte, simetría, monotonía y asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

Ejercicio 11: La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo en horas, x, que ha dedicado a su preparación en la forma siguiente:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x+3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento de esta función. Justifica que si se dedica menos de 15 horas a preparar el examen, el estudiante suspenderá.
b) Justifica que nunca se pueden superar los 10 puntos.

Ejercicio 12: El tipo de interés anual, I(t) en %, ofrecido por un banco depende del tiempo, t, en años, que se mantenga la inversión en la forma $I(t) = \dfrac{90t}{t^2+9}$.

a) Calcula razonadamente cuántos años le conviene pactar a un inversor que trate de optimizar el tipo de interés.
b) Si una inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo? Justifica la respuesta.