EJERCICIOS DE ÁLGEBRA DE 2019

Modelo 1 ejercicio 3A: Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple AX = $(A^{-1}A^t + I)^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz identidad de orden 3.

Modelo 1 ejercicio 3B: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + z = 4 \\ -mx + y + z = 1 \\ x + y + z = m + 3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para m = 1.

Modelo 2 ejercicio 3A: Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de A según los valores de m.
b) Sabiendo que para m = 1 el sistema dado por AX = B tiene solución, encuentra k y resuélvelo.

Modelo 2 ejercicio 3B: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + (m+1)z = m \\ my + z = m \\ y + mz = m \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuélvelo, si es posible, para m = 1.

Modelo 3 ejercicio 3A: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los cuales A tiene inversa.
b) Para m = 2, encuentra la matriz X que cumple AX – BB^t = I, siendo B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

Modelo 3 ejercicio 3B: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

a) Encuentra los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.
b) Para m = 3, resuelve el sistema. En este caso, ¿hay alguna solución en la que x = 10? Razona tu respuesta.

Modelo 4 ejercicio 3A: Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, de la que se sabe que tiene determinante 5.

a) Calcula, indicando las propiedades que utilices, los determinantes de las matrices siguientes: 3A y $\begin{pmatrix} 2a & d+3a & g \\ 2b & e+3b & h \\ 2c & f+3c & i \end{pmatrix}$.

b) Si B es otra matriz cuadrada de orden 3 y tiene determinante 4, calcula, indicando también las propiedades que utilices, el determinante de la matriz BA^{-1} .

Modelo 4 ejercicio 3B: Considera A = $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Encuentra los valores de a para los que el sistema dado por AX = 2X tiene infinitas soluciones.

b) Para a = 0, si es posible, resuelve AX = 2X.

Modelo 5 ejercicio 3A: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{cases}$$

c) Discute el sistema según los valores de m.

d) Para m = 0 resuelve el sistema, si es posible.

Modelo 5 ejercicio 3B: Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Modelo 6 ejercicio 3A: Calcula todas las matrices X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que a + d = 1, tiene determinante 1 y cumple AX = XA siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Modelo 6 ejercicio 3B: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

Considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^t A = B^t$. Discute según los valores de m.

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA DE 2020

Modelo 1 ejercicio 3: Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ c & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Determina a, b y c , sabiendo que AB = C y la matriz A tiene rango 2.

Modelo 1 ejercicio 7: Siendo m un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} x+my=2 \\ 2x+4y=1 \\ mx+y=2m \end{cases}$$

Discútelo según los valores de m y resuélvelo cuando sea posible.

Modelo 2 ejercicio 3: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

c) Discútelos según los valores de a.
d) Resuelve, si es posible, el sistema para a = 1 y a = - 2.

Modelo 2 ejercicio 7: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{37} y A^{41} .
b) Halla el determinante de la matriz $3A^{52}\,(A^{t})^{4}$, donde A^{t} es la matriz traspuesta de A.

Modelo 3 ejercicio 3: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que AB no tiene inversa.
b) Determina los valores de m para los que BA ni tiene inversa.
c) Para m = 0, resuelve, si es posible, el sistema dado por BAX = C y halla una solución en la que x + y + z = 0.

Modelo 3 ejercicio 7: Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que una matriz X verifica que $X^3\,AX = B^2$, halla los posibles valores de su determinante.
b) Determina, si existe, una matriz Y que verifique $A^2\,Y\,B^{-1} = A$.

Modelo 4 ejercicio 3: Considera el sistema de ecuaciones dado por AX = B siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para m = - 2, ¿existe alguna solución con z = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Modelo 4 ejercicio 7: Considera A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, siendo I la matriz identidad de orden tres.
b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = 0$. ¿Existe alguna solución tal que z = 1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Modelo 5 ejercicio 3: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -my + z = 1 \\ 5x + 2y + mz = 0 \\ my + (m-3)z = -3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Para m = 0, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que y = 5.

Modelo 5 ejercicio 7: Considera A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & -3 \\ m-1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de m para los que la ecuación AX + B = C tiene solución única.
b) Para m = 0, halla X tal que AX + B = C.

Modelo 6 ejercicio 3: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m.
b) Para m = 2, calcula la inversa de 2020A.

Modelo 6 ejercicio 7: Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por AX = B, según los valores de a.
b) Para a = 0, resuelve el sistema dado por AX = B. Calcula, si es posible, una solución en la que y + z = 4.

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA DE 2021

Modelo 1 ejercicio 5: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & m \\ m & m+1 & m \\ m & m & m+2 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m existe la inversa de la matriz A? Razona la respuesta.
b) Para m = 1, halla $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$

Modelo 1 ejercicio 6: En una cafetería, tres cafés, una tostada y dos zumos de naranja cuestan 7.50 €, Cuatro cafés, una tostada y un zumo de naranja cuestan 7.20 €.

a) Calcula, de forma razonada, el precio total de dos cafés, una tostada y tres zumos de naranja.
b) ¿El precio de un zumo de naranja podría ser de 2 €? Razona la respuesta.

Modelo 2 ejercicio 5: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 5.

a) Calcula razonadamente el determinante de $2A^3$.

b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 2a & -1 & 3 \\ 2b & 1/2 & 3 \\ 2c & -1/2 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+4 & b-2 & c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

Modelo 2 ejercicio 6: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + my + mz = 1 \\ x + 2my + (m+1)z = 1 \\ 2x + my + mz = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para m = 1.

Modelo 3 ejercicio 5: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$
b) Dadas las matrices B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X que verifica que $A^4 X + B = AC$

Modelo 3 ejercicio 6: Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.
b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Modelo 4 ejercicio 5: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x + 2y + mz = 0 \end{cases}$$

a) Calcula m para que el sistema tenga infinitas soluciones y hállalas.
b) Para m = 2, ¿existe alguna solución tal que z = 1? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Modelo 4 ejercicio 6: Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, con determinante igual a 2.

a) Calcula razonadamente $\left|\frac{1}{3}A^{-1}A^t\right|$.
b) Calcula razonadamente los determinantes $\begin{vmatrix} 6c & 2b & 2a \\ 3f & e & d \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & b \\ 2d-2e & f & e \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Modelo 5 ejercicio 5: Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m.
b) Resuelve el sistema para m = 0, ¿Hay alguna solución en la que x = 0? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Modelo 5 ejercicio 6: En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Modelo 6 ejercicio 5: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ, el rango de la matriz A – λ I, siendo I la matriz identidad de orden tres.
b) Resuelve el sistema (A – I) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y halla, si existe, una solución en la que x = 2.

Modelo 6 ejercicio 6: Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ m & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula m para que AB no tenga inversa.
b) Estudia el rango de la matriz BA según los valores de m.