TEMA 8: MATRICES.

8.1. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN: TABLAS, GRAFOS Y MATRICES.

Se define matriz de **dimensión** m x n en IR, como un conjunto de mxn números reales distribuidos en m filas y n columnas. Cada uno de esos números se llama **elemento de la** matriz. Designaremos a una matriz por $A = (a_{ij})_{mxn} = (a_{ij})$. Los subíndices indican la posición que ocupa dicho número dentro de la matriz, el elemento a_{ij} se encuentra en la fila i y en la columna j, Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ es una matriz de orden 2 x 3.

¿A quién representa a_{22}?, ¿qué lugar ocupa -1?

La naturaleza de los a_{ij} *no tiene porque ser numérica.*

Si el número de filas coincide con el número de columnas, y dicho número es n, se dice que el **orden de la matriz cuadrada** es n. Por ejemplo

$A= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Los elementos 1, 5 y 9 forman la **diagonal principal**, observa que los elementos son a_{ii} (i = i). Los elementos 3, 5 y 7 forman la **diagonal secundaria**, observa que los elementos a_{ij} donde i + j = n + 1

Dos matrices A y B son **iguales** si tienen <u>la misma dimensión</u> y si son iguales todos los elementos que ocupan idéntica posición en ambas matrices. Es decir, A = B si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

Ejercicio 1: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

a) Halla el orden da cada matriz.
b) ¿Cuál es el valor de a_{13}, b_{12} y c_{32}?

Ejercicio 2: Determina x, y, z para que A y B sean iguales, siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2y & -4x & 0 \\ 3 & -2 & 2z+1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3: Escribe la matriz cuadrada A de orden 3 tal que sus elementos verifiquen:

$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ i+j & \text{si } i < j \end{cases}$, solución $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4: Escribe una matriz A de orden 3x4 tal que:

$a_{ij} = \begin{cases} \frac{i+j}{2} - 1 & \text{si } i > j \\ \sqrt{ij} & \text{si } i = j \\ (-3j)^i & \text{si } i < j \end{cases}$ solución: $\begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 & -12 \\ \frac{1}{2} & 2 & 81 & 144 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & -1728 \end{pmatrix}$

8.2 TIPOS DE MATRICES

En este apartado nos tenemos que habituar al lenguaje matricial, por ello al lado de cada definición debes poner un ejemplo.

1. **Matriz Fila**. Es una matriz de dimensión 1xn.
2. **Matriz Columna**. Es una matriz de dimensión mx1.
3. **Matriz Cuadrada**. Tiene el mismo número de filas que de columnas. Una matriz de orden nxn se llama matriz cuadrad de orden n. En estas podemos definir **diagonal principal** de una matriz cuadrada que es la formada por los elementos a_{11} , a_{22}, ..., a_{nn}. Llamamos **diagonal secundaria** a la línea determinada por a_{n1}, $a_{n-1\,2}$, ..., a_{1n}.
4. **Matriz triangular**. Es una matriz cuadrada en la que los elementos situados a un mismo lado de la diagonal principal son nulos. Si los ceros están situados por debajo de la diagonal principal se llama **matriz triangular superior** y si están situados por encima de la diagonal principal se llama **matriz triangular inferior**.
5. **Matriz diagonal**. Es una matriz cuadrada que se caracteriza porque todos los elementos que no están en la diagonal principal valen cero.
6. **Matriz escalar**. Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales. Si los elementos de la diagonal principal de una matriz escalar valen 1 esta se llama **matriz unidad (identidad)**, y se denomina por I o I_n.
7. **Matriz nula**. Es una matriz cuyos elementos son todos nulos.
8. **Matriz opuesta**. Dada la matriz $A = (a_{ij})$ su opuesta es $-A = (-a_{ij})$.
9. **Matriz traspuesta**. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, su matriz traspuesta es aquella que se obtiene al intercambiar en la matriz A sus filas por sus columnas y se representa por A^t. De dicha definición tenemos las siguientes propiedades:

a) Si la dimensión de A es mxn, se tiene que la dimensión de A^t es nxm

b) El elemento a^t_{ij} será igual al a_{ji} de la matriz A.

c) Se verifica que $(A^t)^t = A$.

10. **Matriz simétrica**. Es una matriz cuadrada que se caracteriza porque $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j. Es decir, la matriz coincide con su traspuesta verificando $A = A^t$.
11. **Matriz antisimétrica**. Es una matriz cuadrada cuya matriz coincide con la opuesta de su traspuesta. Es decir, se caracteriza porque $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j. $(i \neq j)$ y los elementos de la diagonal principal son todos nulos. También se llaman **hemisimétricas**. Se verifica $A = -A^t$.

   Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
12. **Matriz escalonada**. Son aquellas matrices que verifican dos condiciones: las filas con todos los elementos nulos ocupan los últimos lugares y el primer elemento no nulo de cada fila, exceptuando la primera fila, debe quedar más a la derecha que el primer elemento no nulo de la fila anterior.

Ejercicio 5: Calcula el valor de a, b y c para que las siguientes matrices sean simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2a-1 & \sqrt{b} \\ a & -3 & -3 \\ 9 & c & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & a^2+a \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6: Indica si las siguientes matrices son o no escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.3. OPERACIONES CON MATRICES DE DIMENSIONES.

Designamos por $M_{mxn}(IR)$ al conjunto de matrices de orden m x n cuyos elementos son números reales. En dicho conjunto podemos definir las siguientes operaciones:

<u>Suma de matrices:</u> $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij})$

De manera que cada elemento de la matriz (c_{ij}) se obtiene sumando los elementos que ocupan igual posición en las matrices A y B. Así pues, resulta claro el carácter INTERNO de la operación en el sentido de que al sumar dos matrices **de igual orden**, se obtiene otra con el mismo orden, y no podrán sumarse dos matrices con distinto orden, debido a la forma en que ha quedado establecida la operación suma.

Propiedades:

1º Es una operación interna.

2ºAsociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3º Elemento neutro: $A + O = O + A = A$

4º Elemento opuesto de una matriz: $A + (-A) = O$

5º Conmutativa: $A + B = B + A$.

6ª $(A + B)^t = A^t + B^t$

Producto de un número real por una matriz:

Sea k un nº real y (a_{ij}) un elemento de $M_{mxn}(IR)$ se define k $.(a_{ij}) = (b_{ij})$ de forma que se multiplica k por cada elemento de la matriz (a_{ij}) y así obtenemos la matriz (b_{ij}), el resultado de la operación es otro elemento de $M_{mxn}(IR)$. A diferencia de la operación suma esta operación es externa en el sentido de que no se opera con dos matrices, sino con un nº y una matriz. Se verifican las siguientes propiedades:

6ª Distributiva respecto de la suma de matrices: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
7ª Distributiva respecto de la suma de escalares: $(k+h) A = k A + h A$
8ª Asociativa mixta: $(kh) A = k [h A]$
9ª Elemento unidad: $1 \cdot A = A$

Ejercicio 7: Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcula: a) A + B b) A – B c) 2A - 2B d) A – I e) 3A + 2B – I.

Ejercicio 8: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula: a) A + B b) B – A c) 3A – 2B d) 3(A + B) – 5B – I d) 2B – 2A
e) $A^t + B^t$ f) $(A + B)^t$.

Ejercicio 9: Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Razone que dimensiones deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

Ejercicio 10: Calcula, en cada apartado, el valor de las letras que aparecen para que:

a) A y B sean opuestas, siendo $A = \begin{pmatrix} x+y & 3y+x \\ 2x+y & 13 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3x+6 & -4y-1 \\ -14 & -x^2+3y \end{pmatrix}$

b) $A^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} a^2 & 2b+c \\ b+2c & 2a-5 \\ b^2+c^2 & 41 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5a & 4 & 16 \\ 8 & 3a & a^2+b^2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11: Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Ejercicio 12: Calcula las matrices A y B sabiendo que

$$\left.\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

<u>Producto de matrices</u>:

Dadas las matrices A y B, se define **matriz producto** C como aquella cuyo elemento c_{ij} resulta de sumar los productos elemento a elemento, de la fila i de la matriz A por los de la columna j de la matriz B. Para poder realizar la multiplicación de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz. La matriz producto C va a tener igual número de filas que la primera matriz, e igual número columnas que la segunda. Es decir: $(aij)_{mxn} \times (bij)_{nxp} = (cij)_{mxp}$ .Se trata pues de una operación externa, por cuanto operamos con matrices de dos conjuntos distintos para obtener una matriz de otro nuevo conjunto de matrices. Observa, si consideramos un conjunto de matrices cuadradas Mnxn(IR) podemos multiplicar dos matrices de orden nxn para obtener otra del mismo orden. Por tanto en el conjunto de matrices cuadradas M nxn (IR) la multiplicación de matrices es una operación interna.
Puedes ver el vídeo https://www.youtube.com/watch?v=4HgEfOukm78

<u>Propiedades</u> del producto de matrices cuadradas de orden n:

a) Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A\ (B \cdot C)$
b) Elemento Unidad. Se trata de la llamada matriz identidad $A \times I = I \times A = A$
c) Elemento simétrico de A es una matriz A^{-1}, **matriz inversa**, que verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

La posibilidad de que exista elemento simétrico se estudiará en un apartado posterior. A las matrices que tienen inversa se les llama **matrices invertibles** o **regulares** y aquellas que no la tienen se llaman **matrices singulares**.

d) Conmutativa. En general no se cumple tal propiedad, contraejemplo
Siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A \cdot B=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -20 & -7 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$
e) Distributiva de la multiplicación respecto de la suma de matrices,

$A\,(B + C) = A\,B + A\,C$

f) Asociativa respecto de la multiplicación por un número real. Sea k un nº real y A, B $\in$ Mnxn (IR) entonces se verifica $k\cdot[A\,B] = [k\,A]\,B$

g) $(A\,B)^t = B^t\,A^t$, si tiene sentido el producto AB

Ejercicio 13: Con las matrices del ejercicio 7, calcula:

a) A.B   b) B.A   c) $(A.B)^t$ d) $(B.A)^t$ e) $A^t.B^t$ f) A^2 g) A^3

Ejercicio 14: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y D $= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula A.B, B.A, A.C, C.A, C.B, B.C, A.D, C.D y A^2

Observaciones:

a) $A \times B = O$ no implica que $A = O$ ó $B = O$. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

b) Tampoco se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB$. *Ya que los productos notables se obtenían por la conmutatividad del producto.* Lo análogo para el cuadrado de la diferencia y para suma por diferencia.

c) No se cumple que si $A \times B = A \times C$ entonces $B = C$. *Ya que no siempre existe la inversa.* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula $3A - A^2 + 2I$.

Ejercicio 16: Si $A \in$ Mn (IR) y verifica que $A^2 = A$, calcula B^2 siendo $B = 2A - I$.

8.4. APLICACIONES DE LAS MATRICES A LAS CIENCIAS SOCIALES.

¿Qué aportan las matrices y sus operaciones? Vamos a desarrollar varios ejemplos en los que la suma y producto de matrices nos ayudan a resolver problemas reales. Antes debemos definir grafo.

Un **grafo** es un conjunto de objetos, llamados **vértices**, conectados entre sí. A las conexiones entre los objetos se denominan **aristas**. 1 significa que hay conexión y 0 de la no existencia de conexión, estas conexiones se representan en una matriz llamada **matriz de adyacencia del grafo**. Por ejemplo: En un archipiélago formado por cuatro islas A, B, C y D se establece un sistema de comunicación por barco. No todas las islas están conectadas entre sí. Dichas conexiones se ven en el siguiente grafo (En el grafo tenemos A → B, A → C, B → D, C → B y D → A, que son las aristas del grafo). La matriz de adyacencia que le corresponde es

$$\begin{array}{cc} & \text{destino} \\ \text{origen} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $a_{12} = 1$ significa que hay comunicación de A hacia B. Si las aristas del grafo están orientadas se llama **grafo dirigido**.

Ejercicio 17: Escribe la matriz de adyacencia: En el libro viene como dibujo A<->A, B → A, C → B, D → C, A → D Y A → C.

Ejercicio 18: Los pueblos A, B, C, D y E están unidos por carreteras de doble sentido tal y como muestra el grafo de la figura. Escribe la correspondiente matriz de adyacencia. Está la figura que corresponde A ↔B, A ↔E, B ↔E, D ↔B, E ↔C, D ↔C

Ejercicio resuelto: **Aplicación al consumo.** La familia F1 consume cada semana 10 barras de pan, 2kg de carne y 8 l de leche, la familia F2 consume 12 barras de pan, 3 kg de carne y 7 l de leche. Por último, la familia F3 consume 15 barras de pan, 4 kg de carne y 10 l de leche.
Los precios, en euros por unidad, de los productos mencionados han variado durante las cuatro primeras semanas del mes de agosto y vienen expresados por la matriz P

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Pan} \\ \text{Carne} \\ \text{Leche} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}65 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ 12 & 12 & 12{,}5 & 13 \\ 1{,}1 & 1{,}15 & 0{,}95 & 1{,}1 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Calcula el consumo de cada familia en cada semana de agosto.
Para ello primero debemos calcular la matriz que representa el consumo de las tres familias. Es la siguiente matriz, nombrada C

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{pan} & \text{carne} & \text{leche} \end{array} \\ \begin{array}{r} F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 2 & 8 \\ 12 & 3 & 7 \\ 15 & 4 & 10 \end{pmatrix} \end{array} = C$$

La matriz producto CP representa el gasto total de cada una de las familias en cada una de las semanas consideradas:

$$CP = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1^a \text{ semana} & 2^a & 3^a & 4^a \end{array} \\ \begin{array}{r} F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} & \begin{pmatrix} 38{,}8 & 39{,}7 & 39{,}6 & 41{,}8 \\ 50{,}9 & 51{,}85 & 52{,}55 & 55{,}1 \\ 68 & 69{,}25 & 70 & 73{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es decir la familia F2 ha gastado 52,55 € en la tercera semana de agosto.

Ya sabemos calcular la matriz de adyacencia de un grafo, ¿alguna operación de matrices aporta utilidad a los grafos? El producto de una matriz por sí misma nos da el número de caminos diferentes de longitud n para ir de un vértice a otro.

Ejercicio 19: **Caminos de un grafo.** El grafo dado por las aristas D →A, A →C, B→D, D→B, representa las conexiones por ferrocarril de cuatro localidades de una misma zona geográfica. Las potencias n-simas de la matriz de adyacencia nos indica el número de caminos diferentes para llegar de una localidad a otra a través de n caminos

Su matriz de adyacencia es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el a_{21} = 1 de A^2, significa que sólo hay una forma de ir de B a A utilizando dos caminos, B → D → A

Ejercicio 20: **Procesos estocásticos**, **son aquellas variables que cambian con el paso del tiempo, en nuestro ejemplo el porcentaje de clientes de una compañía varía con el tiempo.** En una zona geográfica la presencia de las compañías que ofrecen el servicio de internet es la reflejada en la tabla:

Compañía	A	B	C
% clientes	60%	30%	10%

La probabilidad de que un cliente que está en la compañía A permanezca en ella el mes siguiente es del 95%, la de que pase a B del 2% y de que pase a C del 3%
La probabilidad de que un cliente que está en la compañía B permanezca en ella el mes siguiente es del 90%, la de que pase a A del 2% y de que pase a C del 8%
La probabilidad de que un cliente que está en la compañía C permanezca en ella el mes siguiente es del 98%, la de que pase a B del 1% y de que pase a A del 1%
Estas probabilidades se suponen fijas, es decir, son siempre las mismas independientemente del mes en el que se encuentre el proceso. A este tipo de procesos estocásticos se les llama **cadena de Markov**
Para representar la evolución de un mes a otro tenemos la **matriz de transición** T

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}9 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observa que la suma de los elementos de cada fila siempre da 1.
Las potencias n-simas de la matriz de transición T nos indica las probabilidades de cambiar de una compañía a otra en n meses

$$T = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}9 & 70{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}01 & 0{,}98 \end{pmatrix} \to T^2 = \begin{pmatrix} 0{,}9032 & 0{,}0373 & 0{,}0595 \\ 0{,}0378 & 0{,}8112 & 0{,}151 \\ 0{,}0195 & 0{,}019 & 0{,}9615 \end{pmatrix}$$

Puesto que a_{21} = 0,0378 en T^2 significa que un 3,78% de B pasaran a la compañía A después de dos meses, o dicho de otra forma la probabilidad de pasar de B a A en dos meses es de 0,0378.

Ejercicio 21: Una empresa monta ordenadores de dos tipos, de mesa y portátiles, de tres calidades: alta, media, baja.

En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los de mesa: 20 son de calidad alta, 40 de media y 40 de baja, de los portátiles: 30 de alta, 30 de media y 40 de baja.

Para los ordenadores de mesa se invierten cuatro horas de montaje y siete de instalación del software, y para los portátiles, seis y ocho horas, respectivamente.

a) Escribe la matriz A que determina el número de ordenadores montados atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas).
b) Escribe la matriz B que determina el número de horas utilizadas de montaje y de software (filas) para cada tipo de ordenador (columna).
c) Calcula e interpreta la matriz AB^t.

Ejercicio 22: Observa el grafo de aristas A→D, A→C, B→A, B→C, B→D, C→B, D→A. Calcula todos los caminos de longitud 3 que se pueden seguir para ir de C a D y todos los caminos de longitud 4 que se pueden seguir para ir de C a A.

8.5 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Se define el **determinante** de una matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de orden 2 como el número real que resulta de efectuar $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$. Y se denota por $|A|$.

$A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$ Observa, diagonal principal – diagonal secundaria

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = -3 -4 =-7$

Sea A una matriz de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define su **determinante** de la siguiente forma $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}\, a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Para recordarlo de una forma más cómoda observa que van con signo positivo la diagonal principal y sus paralelas y con signo negativo la diagonal secundaria y sus paralelas, es la llamada **regla de Sarrus**.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 9$ Si no lo has entendido bien puedes ver https://www.youtube.com/watch?v=x6UifGsfQ1c , en el vídeo podéis ver varios métodos, nosotros trabajaremos el tercero, regla de Sarrus.

Ejercicio 23: Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ m) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Si conoces las propiedades de los determinantes, hay muchos determinantes que puedes hacer de forma inmediata, aunque no son muy necesarios. Subrayo los más importantes.

Propiedades de los determinantes:

1º) Si se cambian filas por columnas en una matriz cuadrada, su determinante no varía. Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es igual al de su matriz traspuesta.
$|A| = |A^t|$

2º) Si cambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, el determinante de la nueva matriz es igual al opuesto del determinante de la matriz inicial.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

3º) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es nulo, es decir, det $(C_1, C_2, C_2) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4º) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada valen cero, el determinante vale cero, ya que en los productos parciales hay un elemento de cada fila y columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5º) Dada una matriz cuadrada si multiplicamos todos los elementos de una fila (ó columna) por un cierto nº real α, entonces el determinante de la nueva matriz es igual al determinante de la matriz inicial multiplicado por dicho nº α .

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

6º) Si una fila de un determinante está formada por términos que son suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de determinantes del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(-4-10)$$

7º) Dada una matriz cuadrada, si a una fila se le suman otras filas multiplicadas por factores cualesquiera, la nueva matriz tiene el mismo determinante que la matriz inicial. (Análogo para columnas). **Debes tener en cuenta** que la fila a la que sumamos la combinación lineal no puede estar multiplicada por ningún número, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \text{sumo } F_1 + F_2, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

8º) Determinante de una matriz triangular. El determinante de una matriz triángular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

9º) |A.B| = |A| |B|

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & 13 & 10 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 40$$

10º) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Su demostración se basa en la propiedad anterior, $|A|\ |A^{-1}| = |A.\ A^{-1}| = |I| = 1$, por tanto, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. De esta propiedad deducimos que no todas las matrices tienen determinante, las matrices que tienen determinante cero no tienen inversa.

8.6. MATRIZ INVERSA.

Dentro de las matrices cuadradas, al definir el producto de matrices, hablamos de la matriz inversa. La matriz inversa de A es una matriz A^{-1} que verifica que $A\ .\ A^{-1} = A^{-1}\ .\ A = I$. Si una matriz A tiene inversa se dice que es invertible o regular. Si no tiene inversa se dice que es singular.

Para calcular la matriz inversa de una matriz debemos seguir los siguientes pasos:

1) $|A|$ 2) $AdjA$ 3) $(AdjA)^t$ 4) $A^{-1} = \frac{(\mathrm{AdjA})^t}{|\mathrm{A}|}$

**Del último paso entendemos que la inversa existe si el determinante es distinto de cero.

Propiedades de la matriz inversa:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ c) $(A\ B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

Ejercicio 24: Calcula la matriz inversa de A, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 25: Aplicando la definición, calcula las matrices inversas de:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 26: Calcula X de forma que AX + B = C, siendo

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 27: Calcula X de forma que XA – B = 2C, siendo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 28: Calcula X de forma que XA – B = 2C, siendo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 29: Dada las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y P = $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial XA = B + P.

Ejercicio 30: Dada las matrices M= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, N = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y P = $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial MX + N = P.

Ejercicio 31: Dadas la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación $2X \cdot A - A^2 - 3 I_3 = O$

Ejercicio 32: Despeja X de las siguientes ecuaciones:

a) $B \cdot X + A = C$
b) $2X \cdot A - A^2 - 3 I_3 = O$
c) $(A - A^t) \cdot X = B$
d) $A \cdot B \cdot X - C \cdot X = C^t$
e) $X \cdot (A + I_2) = 3 B^t$.
f) $A^4 \cdot X = B^2 + I_2$
g) $A \cdot X - 2 B \cdot C^t = A^2$.
h) $X \cdot C - D^2 = I_2$.
i) $\frac{1}{5}(B + A \cdot X) = C^t$.
j) $X \cdot A = 2 B^t + I_2$

Ejercicio 33: Se considera la matriz: A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule $A^{2018} + A^{2019}$

Ejercicio 34: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ Calcula razonadamente A^{100}.

Ejercicio 35: Calcula a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ sea singular.

Ejercicio 36: Determina para qué valores de m la matriz A es regular siendo

A= $\begin{pmatrix} -1 & -1-m \\ -1-m & -4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 37: Hallar los valores de a para los que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible.

Calcula su matriz inversa para a = 1.

Ejercicio 38: ¿Para qué valores de a no tiene inversa la matriz A? Siendo A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

. Calcular la inversa para a = 1.

Ejercicio 39: Calcula A y B sabiendo que verifican $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$