UNIDAD 6: GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

1 ECUACIONES DE LA RECTA.

Una recta queda determinada por un punto y un vector, o bien, por un par de puntos. ¿Cómo son los demás puntos que están en una recta? Sea r la recta que pasa por A y lleva la dirección del vector no nulo $\vec{u}$. Sea X un punto de r, entonces $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección, es decir, son proporcionales. A $\vec{u}$ se le llama vector director:

$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v} \quad \lambda \in IR$,

$\vec{x} - \vec{a} = \lambda\vec{v}$

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} \quad \lambda \in IR$ **Ecuación Vectorial** (Dándole valores a λ obtenemos los distintos puntos de r).

Sustituyendo las coordenadas $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $A = (a_1, a_2)$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{array}\right\} \lambda \in \Re$$ **Ecuaciones Paramétricas**

Despejando λ, obtenemos:

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}$$ **Ecuación Continua**

Despejando obtenemos una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ llamada **ecuación General** o implícita. Observa que el vector $\vec{n} = (A, B)$ es ortogonal al vector director y a la recta, es decir, el vector director de la recta es de la forma $\vec{u} = (-B, A)$.

Despejando de la ecuación general obtenemos $y = mx + n$ **Ecuación Explícita**, siendo m la pendiente de r con $m = tg\alpha = \frac{u_2}{u_1}$, siendo el ángulo α formado por la recta con la parte positiva del eje x y n el punto de corte con el eje y.

Ejercicio 1: Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A = (2,3) y tiene como vector director $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Ejercicio 2: Calcula las ecuaciones de la recta r sabiendo que pasa por los puntos A = (3,1) y B = (7,-1).

Ejercicio 3: Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto A = (3,5) y lleva de dirección al vector $\vec{u} = (2,-4)$.

Ejercicio 4: Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos:

a) A=(-3,2) y B=(1,-4) b) A = (0, 3) y B = (0, 5)

Ejercicio 5: Calcular dos puntos y un vector director de las siguientes rectas:

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3\lambda + 2 \\ y = -\lambda + 3 \end{array}\right\} \lambda \in IR$

b) $\frac{x}{3} = -y + 2$

c) $\vec{x}$ = (1,-5) + t(2,3) t$\in$ IR

d) y = -3x + 2 e) 2x + 3y – 7 = 0

f) y = 2

g) x = -4

Ejercicio 6: Averigua si el punto A = (3, -1) pertenece a algunas de las rectas del ejercicio anterior.

Ejercicio 7: Calcula la ecuación de la recta r según los datos de cada apartado:

a) pasa por los puntos A = (2,1) y B = (3,-1) . **Ec. paramétrica.**

b) pasa por A=(3,0) y su vector director es v = (0,-1). **Ec. continua.**

c) pasa por A=(2,3) y es paralela a la recta s: x + y – 2 = 0. **Ec. general.**

d) pasa por A=(1,-3) y es perpendicular a la recta s: y = 3x+2. **Ec. explícita.**

e) pasa por el punto de corte de las rectas *s: x – y + 2 = 0* y *t: x = - y* y además es paralela a la recta *p: 2x – y + 3 = 0*. **Ec punto pendiente.**

f) pasa por A=(-2,3) y es horizontal. **Ec vectorial y Ec. Explícita**

g) pasa por A=(3,-2) y es paralela al eje de ordenadas. **Ec. Explícita**

h) pasa por los puntos A=(1,3) y B=(-1,5). **Ec. General (y de la general a la Ec. Paramétrica).**

i) pasa por A=(1,0) y es paralela a la recta s: 2x – y + 3 = 0. **Ec. Paramétrica**

Ejercicio 8: Hallar la ecuación continua de r sabiendo que es perpendicular al segmento de extremos A=(5,6) y B=(1,8) y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

Ejercicio 9: a) Calcula la ecuación vectorial de una recta paralela al eje OX y que pasa por el punto (1, 5). Calcula su ecuación general.

b) Calcula la ecuación vectorial de una recta paralela al eje OY y que pasa por el punto (1, 5). Calcula su ecuación general.

Hay otras dos ecuaciones que son útiles: despejando de la ecuación continua, obtenemos:

$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$, $y - a_2 = \frac{u_2(x - a_1)}{u_1}$, $y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}(x - a_1)$, $y - a_2 = m(x - a_1)$ **Ecuación punto pendiente**.

Por otro lado, a partir de los puntos de cortes de la recta con los ejes de coordenadas A=(a,0) y B=(0,b) entonces la **ecuación segmentaria** quedaría de la forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Ejercicio 10: Calcular la ecuación punto-pendiente de la recta r sabiendo que pasa por el punto A=(-2, 1/3) y:

a) Tiene pendiente igual que la recta s que pasa por los puntos P = (2, 1) y Q=(3, 4).
b) Tiene pendiente perpendicular a la recta s.

Ejercicio 11: Dada la recta 5x – 3y + 7 = 0, hallar la longitud de los segmentos que determina sobre los ejes. Calcular su ecuación segmentaria.

Ejercicio 12: Calcula la ecuación punto pendiente, segmentaria y explícita de las siguientes rectas. Señala sus pendientes e indica un vector director de cada una de ellas:

a) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{-1}$ b) 5x + 3y + 6 = 0 c) $\left.\begin{array}{l} y=5-3t \\ x=2+t \end{array}\right\}$

Ejercicio 13: Determina si los puntos A=(3,1), B=(5,2) y C=(1, 0) están alineados.

Ejercicio 14: Hallar el área limitada por la recta 5x + y – 5 = 0, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Calcular su ecuación segmentaria.

2 POSICIONES RELATIVAS.

a) DE UN PUNTO Y UNA RECTA. Se trata de saber si el punto está o no en dicha recta, para ello se observa si al sustituirlo en la ecuación de la recta cumple o no dicha igualdad.

Ejercicio 15: Estudia si los puntos A=(3,-1) y B=(0,3) pertenecen o no a las siguientes rectas:

a) r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}$ b) s: x + 2y – 6 = 0. c) t: $\left.\begin{array}{l} x=2t+3 \\ y=3t-1 \end{array}\right\}$

Ejercicio 16: Calcular el valor de C sabiendo que la recta r: 4x – 3y + C = 0 pasa por el punto A = (-1, 0).

b) DE DOS RECTAS. Dos rectas pueden ser secantes (se cortan en un punto), paralelas (no hay ningún punto en común) y coincidentes (tienen todos los puntos en común). *Hacer los dibujos*. Observaciones:
   1) Para ver la posición relativa de dos rectas debemos comparar sus vectores directores y en caso de que sean paralelos ver la pertenencia o no del punto.
   2) Comparando las ecuaciones generales, debemos tener en cuenta que si $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$ son coincidentes, $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$ son paralelas y si $\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$ son secantes.
   3) Si son secantes y queremos calcular el punto de corte debemos tener las ecuaciones generales de la recta y resolver el sistema.

Ejercicio 17: Estudia la posición relativa (dos a dos) de las rectas y calcula el punto de corte cuando sean secantes:

a) r: $\left.\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=2-3\lambda \end{array}\right\}$ y s: $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+5}{3}$ b) r:(x,y) = (2,-1) + t(1,-1) y s:-x + y + 5 = 0

c) r: $\frac{x+2}{5}=\frac{2-y}{-1}$ y s: -x – 5y + 12 = 0 d) r:3x + 2y – 1 = 0 y s:5x – y + 7 = 0

e) r: 2x – 3y + 7 = 0 y s: -4x + 6y = 0 f) r:8x – 2y + 2 = 0 y s: -4x + y – 1 = 0

Ejercicio 18: Hallar el punto de corte, si es posible, de las rectas:
a) r: 8x – 2y –20 = 0 y s: 3x + 2y – 13 = 0 b) r: x – y = 30 y s: x – y = 14
c) r: 3x + 2y – 19 = 0 y s: 5x + y – 20 = 0

Ejercicio 19: Las ecuaciones de dos rectas son r: 3x - 5y + 2 = 0 y s: 6x + my = 1. Halla el valor de m para que:
a) Las rectas sean paralelas.
b) Las rectas sean perpendiculares.
c) Las rectas sean secantes pero no perpendiculares.
d) Las rectas sean coincidentes.
e) La segunda recta pase por el punto A=(6,5).

Se llama <u>haz de rectas secantes</u> de vértice P = (a, b) al conjunto de todas las rectas que pasan por el punto P. Dichas rectas tienen de ecuación y – b = m (x – a) con m nº real.
Se llama <u>haz de rectas paralelas</u> a la recta r: Ax + By + C = 0 al conjunto de todas las rectas paralelas a r cuya ecuación es de la forma Ax + By + k = 0 con k nº real.

Ejercicio 20: Dadas las rectas r: 2x – y + 4 = 0 y s: 3x + 2y – 9 = 0:
a) Hallar su punto de intersección.
b) Las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (-3,4) y son paralelas a cada una de las dadas.

Ejercicio 21: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y r´siendo r: 2x + 3y – 5 = 0 y r´: x + y = 0, y el punto de intersección de las rectas s y s´, siendo s: x + 5y – 3 = 0 y s´: -x + y – 3 = 0.

Ejercicio 22: Dadas las rectas: r determinada por el punto A=(2,1) y el vector $\vec{u}$ =(a,4) y s determinada por el punto B=(-1,4) y el vector $\vec{v}$ =(5,3), calcula a para que r y s sean paralelas. ¿Para qué valores de a las rectas r y s son secantes? ¿Pueden ser coincidentes?

Ejercicio 23: Dadas las rectas r: 3x + by – 8 = 0 y s: ax – 3y + 12 = 0, determinar a y b para que se corten en el punto P = (2,-3).

Ejercicio 24: Dadas las rectas r: $3x + my - 7 = 0$, s: $4x + y - 14 = 0$ y t: $7x + 2y - 28 = 0$ determinar m para que las tres sean rayos de un mismo haz de secantes.

3 DISTANCIAS EN EL PLANO.

a) LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS A y B del plano es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Es decir, $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Observaciones:

a) $d(A,B) = 0$ si, y sólo si, $A = B$

b) $d(A,B) = d(B,A)$

c) $d(A,B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Ejercicio 25: Hallar la distancia entre estos pares de puntos:

a) A(5,4) y B(-2,3) b) C(0,4) y D(0,-7) c) E(3,0) y F(-2,0)

Ejercicio 26: Hallar los lados del triángulo de vértices: A(-2,2), B(5,3) y C(2,15).

Ejercicio 27: Hallar los lados y los ángulos del rombo de vértices: A(2,5), B(6,2), C(9,6) y D(5,9).

b) DISTANCIA DE UN PUNTO P A UNA RECTA r:

B1) Si el punto P pertenece a la recta $d(P,r) = 0$.

B2) Si el punto P no pertenece a r, se define la distancia de P a la recta r como el módulo del vector QP siendo Q la proyección perpendicular de P sobre r.

Es decir: $$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{A_rP}\cdot\overrightarrow{n_r}\right|}{\left|\overrightarrow{n_r}\right|} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejercicio 28: Hallar la distancia de los siguientes puntos a las rectas dadas:

a) P(2,3) y r: $2x - 3y + 5 = 0$ b) Q(-1,3) y s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3}$

c) R(2,-4) y t: $\left.\begin{array}{l} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{array}\right\} \lambda \in IR$

Ejercicio 29: Determina el punto de la recta $y = 2x + 1$ que dista 3 u del punto (1, 0).

c) DISTANCIAS ENTRE RECTAS:

D1) Si las rectas se cortan, se considera que la distancia es nula.

D2) Si las rectas son coincidentes, se considera que la distancia es nula.

D3) Si r y s son dos rectas paralelas, la distancia de r a s coincide con la distancia de un punto de r a la recta s, es decir, d(r,s) = $\dfrac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

siendo r: $Ax + By + C = 0$ y s: $Ax + By + C' = 0$

Ejercicio 30: Calcular la distancia entre las siguientes rectas:
a) r: $x - 2y + 4 = 0$ y s: $3x - y - 1 = 0$
b) r: $2x - y = 3$ y s: $y = 2x + 3$
c) r: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{2}$ y s: $y = \frac{1}{2}x + 3$
d) r: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{array}\right\} \lambda \in IR$ y s: $2x + y - 1 = 0$
d) r: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{3}$ y s: $-3x + 2y = 4$

Sea r una recta y A un punto del plano vectorial. Se dice que A´es el **punto simétrico de A respecto de r** si la recta r pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento AA´.

Ejercicio 31: Calcula el punto simétrico de A = (2, 4) respecto de r: $y = 2x - 3$.

Ejercicio 32: Calcula el punto simétrico de A = (2,3) respecto de r: $x + y - 3 = 0$.

4 ÁNGULO FORMADO POR DOS RECTAS.

Si dos rectas r y s son secantes, el ángulo que forman es el menor de los ángulos determinados por dichas rectas.

Cos(rs) = $|\cos(\vec{u}\vec{v})| = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{|AA´+BB´|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A´^2+B´^2}}$ siendo u el vector director de r y v el vector director de s, r: $Ax + By + C = 0$ y s:$A´x + B´y + C´ = 0$

En consecuencia:

a) El ángulo de dos rectas varía entre 0º y 90º.
b) Si dos rectas son coincidentes o paralelas forman un ángulo de 0º.
c) Dos rectas son perpendiculares si forman un ángulo de 90º. Se denota por $r \perp s$. Si r y s son perpendiculares, las pendientes verifican $m_r = \dfrac{-1}{m_s}$.
d) También podemos calcular el ángulo de dos rectas r y s utilizando las pendientes, teniendo en cuenta: $tag\alpha = |tag(\sigma - \beta)| = \left|\dfrac{tg\sigma - tg\beta}{1 + tg\sigma tg\beta}\right| = \left|\dfrac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right|$

Ejercicio 33: Calcular el ángulo formado por las rectas:

a) r: $x - 2y + 4 = 0$ y s: $3x - y - 1 = 0$

b) r: $2x - y = 3$ y s: $2x + y = 1$

c) r: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2}$ y s: $y = 2x + 3$

d) r: $\left.\begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{array}\right\}$ y s: $2x + y - 1 = 0$

e) r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$ y s: $-3x + 2y = 4$

Ejercicio 34: Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 1) y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje x.

Ejercicio 35: Hallar los ángulos del triángulo de vértices A=(-2,2), B=(5,3) y C=(2,15).

Ejercicio 36: Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto A=(-3,0) y forman con la recta de ecuación s: $6x - 3y + 9 = 0$ un ángulo cuya tangente vale 1/3.

5 APLICACIONES.

Ejercicio 37: Los puntos C = (-1,3) y B = (-3,3) son los vértices de un triángulo isósceles que tiene el tercer vértice A en la recta r: $x + 2y - 6 = 0$, siendo AB y AC los lados iguales. Calcular las coordenadas de A y el área del triángulo.

Ejercicio 38: Considera el triángulo formado por las rectas de ecuaciones $2x - y - 1 = 0$; $x + 2y - 8 = 0$ y el eje de ordenadas. Calcula su perímetro y su área.

Ejercicio 39: Determina si es equilátero, isósceles o rectángulo el triángulo cuyos vértices son A(2, 2), B(5,6) y C (-2, 5). Averigua el valor de la altura correspondiente al vértice A y utilízalo para calcular el área del triángulo.

Ejercicio 40: Un punto de la recta r:$x + 3y + 7 = 0$ equidista de los puntos A = (-1, 3) y B(3, -5). Calcúlalo.

Ejercicio 41: Determina los puntos de la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{array}\right\} \lambda \in R$ que distan $\sqrt{10}$ u de la recta s: $y = 3x + 1$.

Ejercicio 42: Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto P(-1, 5). Exprésala en forma continua y explícita.

Ejercicio 43: Considera la recta de ecuación $y = -7x + 5$. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por (-7, 5).

Ejercicio 44: Dadas las siguientes rectas r: $5x - y + 4 = 0$ y s: $\left.\begin{array}{l} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{array}\right\} \lambda \in IR$

Determina el valor de m para que las rectas r y s sean:

a) Paralelas.
b) Perpendiculares.
c) Coincidentes.

Ejercicio 45: Calcular el pie de la perpendicular trazada por el punto P(-1,2) a la recta r: 3x – 5y –21 = 0, y la distancia de dicho pie al punto P. Comprueba que esa distancia coincide con la distancia de P a la recta r.

Ejercicio 46: Calcula el valor de a para que la distancia entre las siguientes rectas sea de 4 unidades, siendo $r: 9x + 12y - 15 = 0$ y $s: 3x + 4y + a = 0$

Ejercicio 47: Encuentra los puntos de la recta $r: 2x + 3y + 4 = 0$ que están a dos unidades de la recta $s: 3x + 4y - 6 = 0$

Ejercicio 48: Halla la mediatriz del segmento de extremos A(-1,3) y B(5,-3) (o el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B).

Ejercicio 49: Calcula la bisectriz de las rectas r: 3y = 4x + 1 y s: 5x + 2 = 0 (recuerda dos rectas tienen dos bisectrices y representan el lugar geométrico de los puntos que equidistan de r y s)

Ejercicio 50: Halla los puntos de las recta r: y = -x + 6 que equidistan de las rectas t y s, siendo s: 3x – y = 1 y t: 3x + y = 5.